東北数学教育学会　第50回年会

平成30年11月3日（土）
於：宮城教育大学

数学的問題解決における思考過程の可視化に関する研究

椎名　美穂子　　重松　敬一　　新木　伸次　　黒田　大樹

秋田県総合教育センター　　奈良教育大学名誉教授　　国士舘大学　　皇學館中学・高等学校

１　問題の整理と焦点化

２　可視化の必要性

３　授業の実際と分析

４　成果と課題

1　問題の整理と焦点化

①答申（H28 .12月）

資質・能力の育成に向けて、主体的・対話的で深い学びの実現に向けた授業改善の取組は、小学校、中学校を中心に多くの実践が積み重ねられており～

→　高等学校については更なる授業改善に向けた取組

②新学習指導要領　目標

(3) ～問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う

→　結果だけなく、思考過程を大切にすること

③先行研究 「学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発とその検証」

発展的な思考や態度，内容についての教師の理解が不十分であり，多くの教師が発展的思考・態度を視点にした授業づくりを困難にしている

→　学習者主体の視点をもって授業実践できること

高等学校における数学の授業DVD分析

映像の様子	授業者へのインタビュー	生徒の様子
教師が問題を提示したり、質問したりしても、生徒は無反応	・教室が静かになることに抵抗がある ・待っても授業が進まないので、指示をする（時間がもったいない） ・解法を説明して授業を進める（解法は決まっているから分かり易く説明した方がよい） ・授業の軌道修正はあまりしない ・解決過程の「問題の理解」「計画の考案」「計画の実行」「振り返り」を順次行うことを優先する ・生徒の思考を読み取ることの意識が十分でない	・問いをもつことができない（問題の中の問い、自分にとっての問い） ・獲得している既習内容を自ら引き出すことができなかったり、既習内容と関連付けて考えることの不足 ・既習方法である図式表等を用いて関連付けて考えることの不足
問題解決が主体的でない	数学は教師の中で存在しているが、生徒のものにはなっていない 生徒個人の問いは様々であることに気付きにくい 反応がないので生徒の理解状況が把握できていない	問いが生まれていないのではないか 分からない 他の知識と関連付けて成功した経験が少ないのではないか できない

教師側の問題と生徒側の問題の整理

教師

学習者の思考過程よりも、表面的な反応に左右されて授業を進めてしまう。

→学習者がする思考を発展させる働きかけが弱い

学習者

思考停滞の状況になった場合、説明を聞く側になる場合が多い。

→自ら既習内容と関連付ける経験が乏しくなり、自ら思考を発展させることができないままになる

＜双方の問題について＞

高校数学の授業において、数学学習に取り組む意欲はあるものの、
問題に関わっていけない生徒の思考の実態、
教師の「生徒の思考過程」への理解不足

２　思考停滞の可視化

教師の質問は、学習者自身が自分自身に問いかけるようなものであることが望ましい

どんな問題を解くことのうちにも、小さい発見の芽は必ずある

（G．Polya）

自分自身に問いかける
＝自分自身に働きかける力が必要である

ポリアは、学習者の「小さな発見の芽」を実際に見たかように述べている
数学的問題解決において、
教師、生徒の両者にとって、思考停滞の状況を可視化する必要がある

可視化して、学習者の思考停滞への理解につなげる

生徒の反応から、教師側の働きかけの視点を考える

先行研究

G.Polya（1954）	重松敬一（2013）	清水美憲(2006)
• 大きな発見は大きな問題を解くことができるが,どんな問題を解くことのうちにも小さな発見の芽生えは必ずあるものである。 • 教師の質問は学生自身が自分に問いかけるようなものであることがのぞましい。 • ＜よい考えを探すこと＞ 前にしておいたことのある仕事が役に立ち、記憶が役に立ちそうなところで手をつければよい。 ＜どうすればよいか＞ 問題をいろいろな角度から考察し、既に知っている事柄との結びつきを探すべきである。	• たとえば、「図をかきなさい」というように、これのみ部分的に代行すると、見かけ上は単なる指示になってしまうため、コントロールに関わるメタ認知的知識も含めて言葉をかけていくことが大切であると述べている。 • 「おもしろい方法だね」「前の方法を忘れているね」といった子どもの正負の自己評価を教師が代行することを提案している。 • メタ認知のプロセスが内面に形成されるよう学習支援（モニター「前と違う？」→自己評価「そうだ、前と違う」→メタ認知的知識「前にやった問題との違いを考えたら解決できた」→コントロール「前とどこが違うか考えよう」）を提案している。	• 学習者のメタ認知的側面を顕在化するまえの方法とその具体的な手法が求められること、さらに学習者のメタ認知を考慮に入れた指導の研究が課題となっていると述べている。 • 解決過程のある時点において、「自分にとって何が問題なのか」あるいは「何故問題なのか」を考えるためには、自己の活動と問題との関係において対象化することが必要であると述べている。 • 問題の変容には、自己の活動を対象化した解決者の意図が反映しており、そこに、メタ認知的側面をとらえる視点を置くことが有効であると述べている。

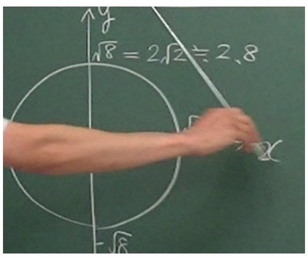
3　授業の実際と分析

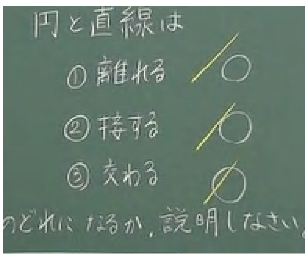
日時　平成30年7月18日

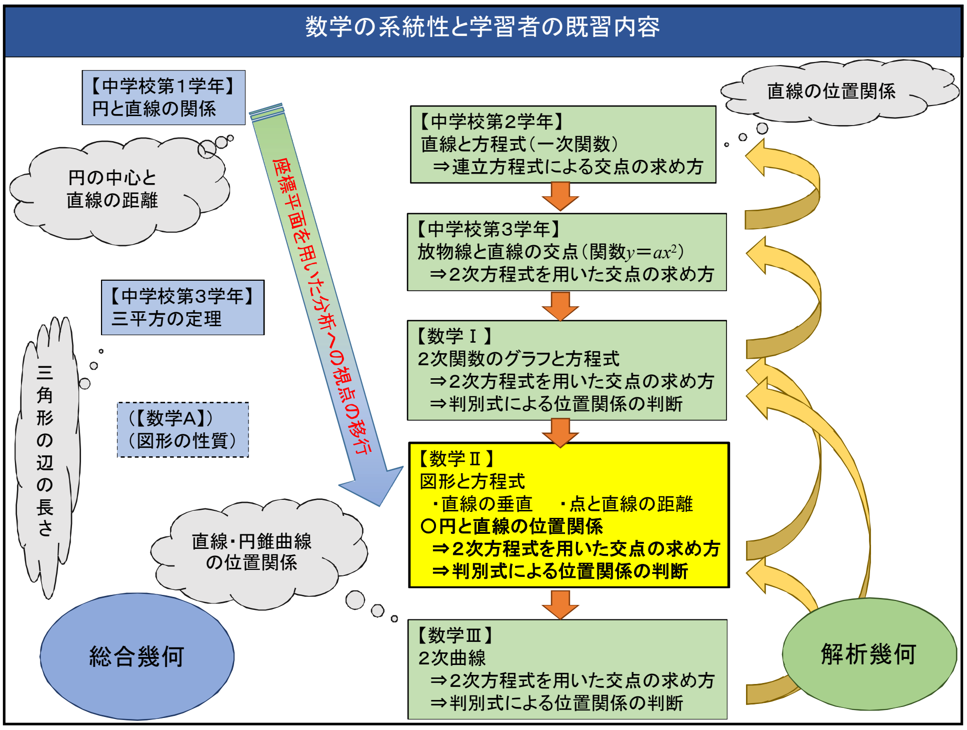
対象　P県　高等学校第3学年（6名）

単元　図形と方程式

目標　2次方程式の判別式などを用いて、円と直線の位置関係について考察する



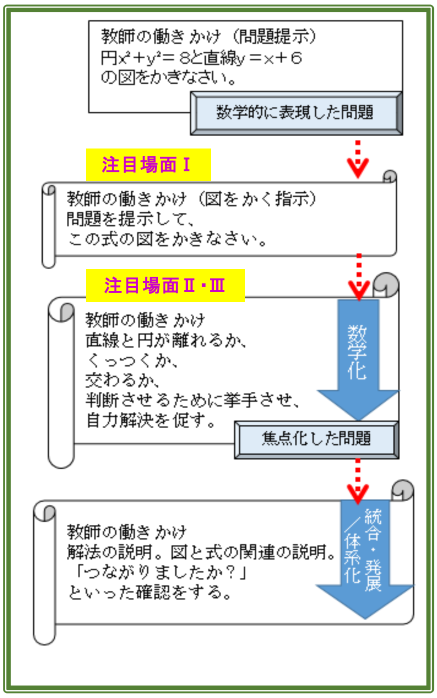




実際の授業での教師の働きかけ

＜数学的問題解決＞

学習指導案には、数学化、統合・発展といったことが書かれており、数学的活動を重視していた。



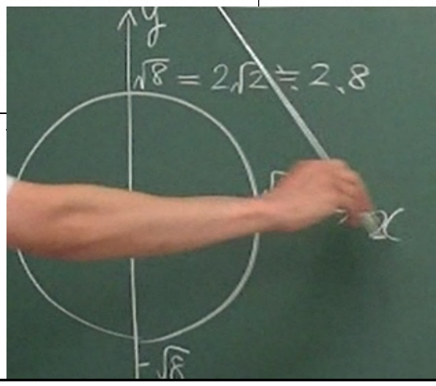
停滞局面Ⅰ

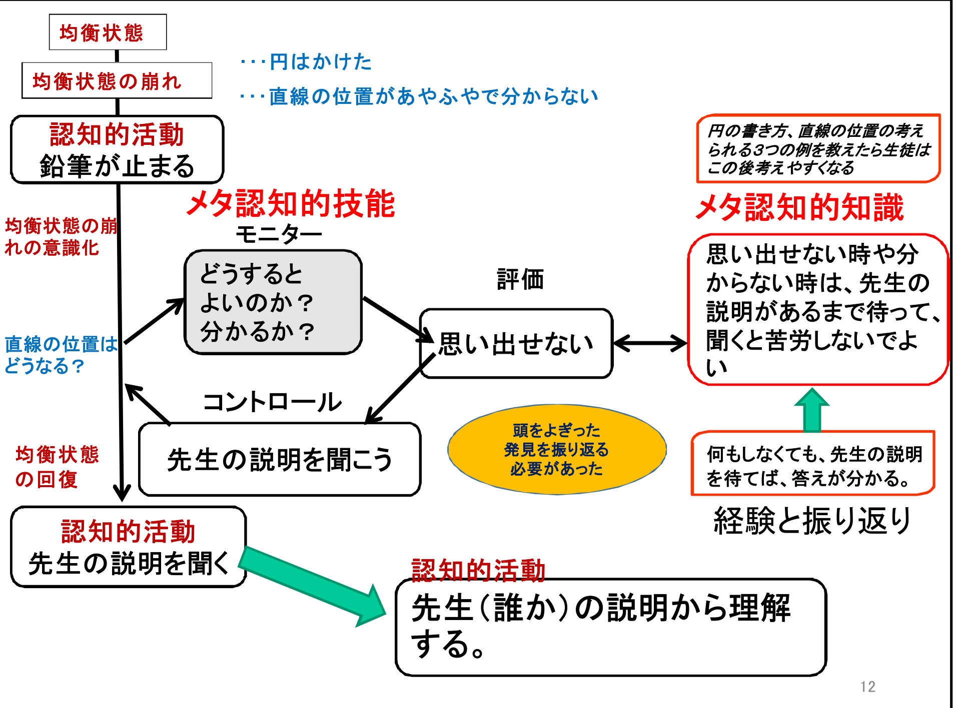
１．単元名　　第２章　図形と方程式　３節　円の方程式

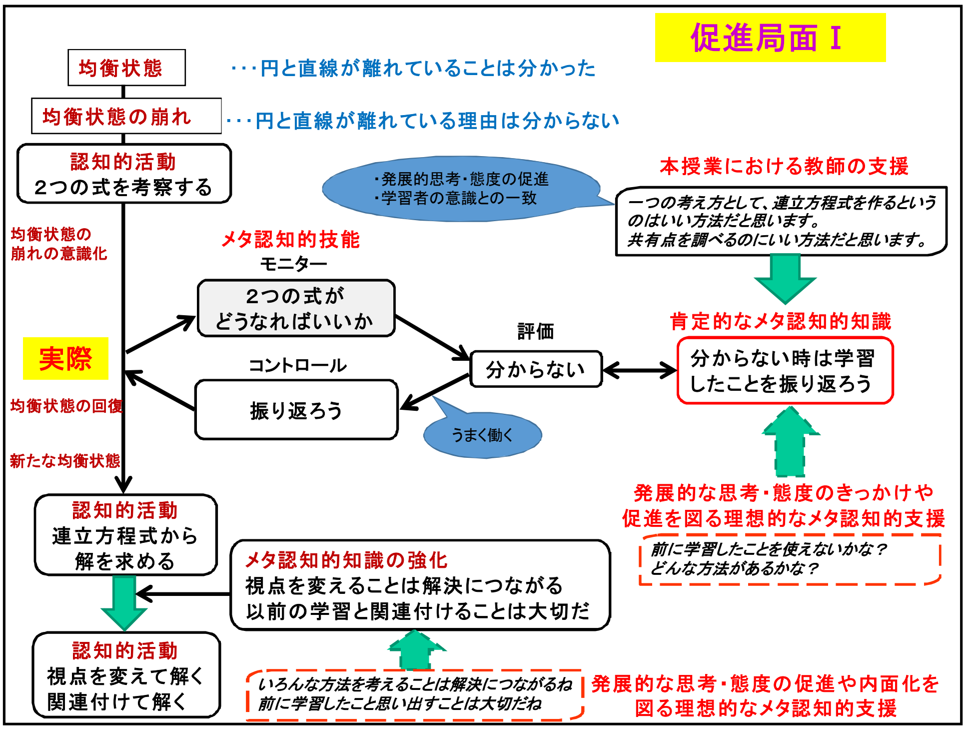
２．本時の目標　「２次方程式の判別式などを用いて、円と直線の位置関係について考察する。」

３．本時の展開

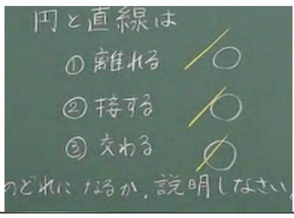
過程	学習活動	指導上の留意点	評価の観点・手段
導入 ５分	・問題を解く。(個別) ３分 「円$x^2+y^2=8$と直線$y=x+6$の図をかきなさい。」 ・確認する。２分 【予想される考え】 ・円と直線が離れている図	・$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$がおおよそ 2.8 であることを押さえさせる。	
展開	・問題を解く。(個別) ８分		

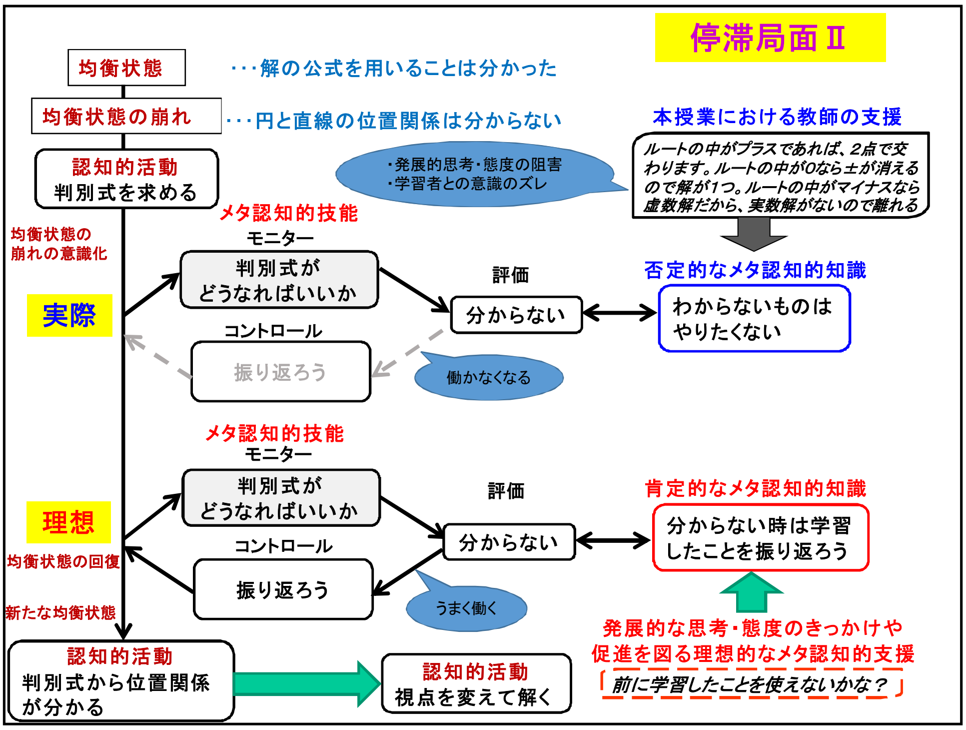


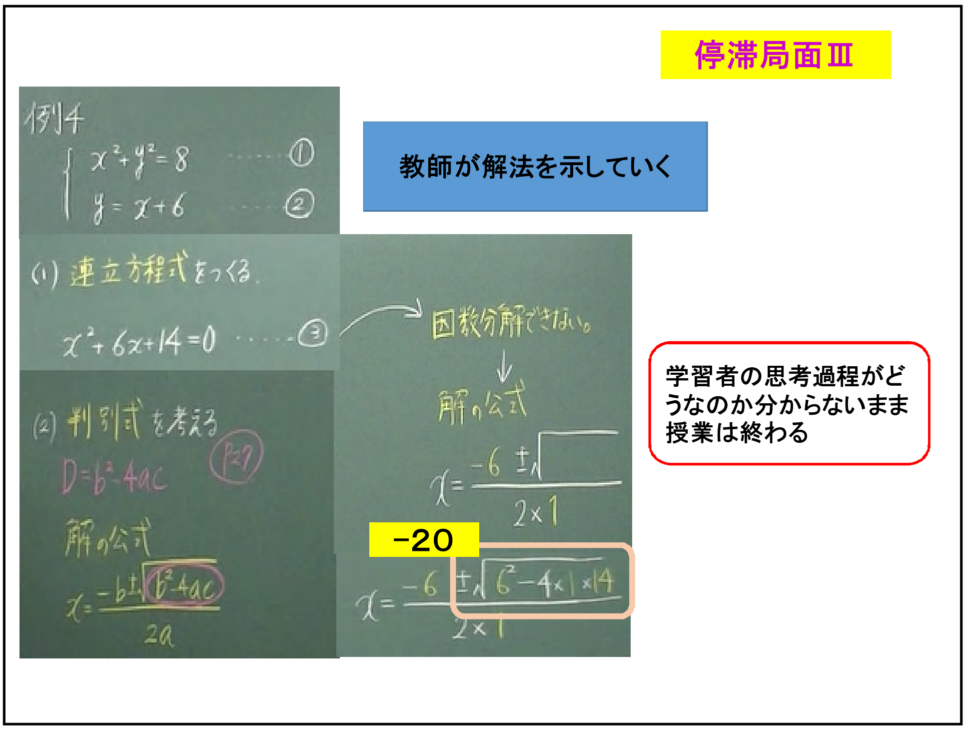


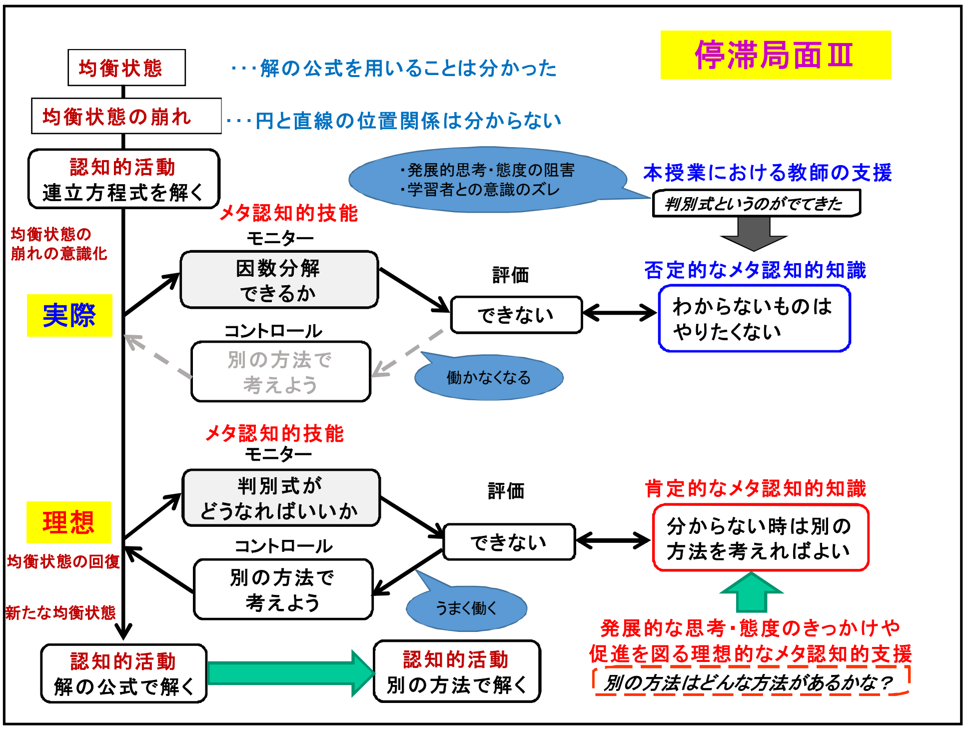


停滞局面Ⅱ・Ⅲ

展開 25分	・問題を解く。（個別） ８分 「円と直線が交わらない理由・根拠を説明しなさい。」 ・考えを共有する。（ペア） ７分 ・確認する。（全体） １０分 【予想される・出てほしい考え】 ・式を連立させる。 ・解の公式を使う。 ・判別式を使う。 ・「原点と直線の距離」と「半径」を比較する。	・教科書 P７３の例４を参考にさせる。 ・教師による説明だけでなく、生徒の発言を整理しながら板書などをして、まとめる。 Ⅱ ・判別式を利用する意味が分からない場合は、解の公式を思い出させる。教科書 P２７を参考にさせる。	【B】円と直線の位置関係について考察することができるか。（ノート、発言）
10分		Ⅲ ・「D＝－20＜０」の式が読み取れるよう、式変形や不等号などを丁寧に指導する。 ・「実数解を持たない」ことと「円と直線の共有点がない」ことを結びつけられない場合は、教科書 P７２の例題３を参照させる。	【C、D】２次方程式の判別式などを用いて、円と直線の位置関係について考察することができるか。（ノート）


停滞局面Ⅱ
均衡状態
・・・解の公式を用いることは分かった
均衡状態の崩れ
・・・円と直線の位置関係は分からない
本授業における教師の支援
ルートの中がプラスであれば、2点で交わります。ルートの中が0なら±が消えるので解が1つ。ルートの中がマイナスなら虚数解だから、実数解がないので離れる
認知的活動
判別式を求める
・発展的思考・態度の阻害
・学習者との意識のズレ
メタ認知的技能
モニター
均衡状態の崩れの意識化
実際
判別式が
どうなればいいいか
評価
分からない
否定的なメタ認知的知識
わからないものは
やりたくない
コントロール
振り返ろう
働かなくなる
メタ認知的技能
モニター
判別式が
どうなればいいいか
評価
肯定的なメタ認知的知識
理想
分からない
分からない時は学習
したことを振り返ろう
均衡状態の回復
コントロール
振り返ろう
うまく働く
新たな均衡状態
発展的な思考・態度のきっかけや
促進を図る理想的なメタ認知的支援
「前に学習したことを使えないかな？」
認知的活動
判別式から位置関係
が分かる
認知的活動
視点を変えて解く


停滞局面Ⅲ
教師が解法を示していく
例4
$x^2+y^2=8$ ……①
$y=x+6$ ……②
(1) 連立方程式をつくる。
$x^2+6x+14=0$ ……③
因数分解できない。
解の公式
(2) 判別式を考える
$D=b^2-4ac$
解の公式
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\frac{-6\pm\sqrt{}}{2\times1}$
−20
$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times1\times14}}{2\times1}$
学習者の思考過程がどうなのか分からないまま授業は終わる



教師

働きかけ

学習者

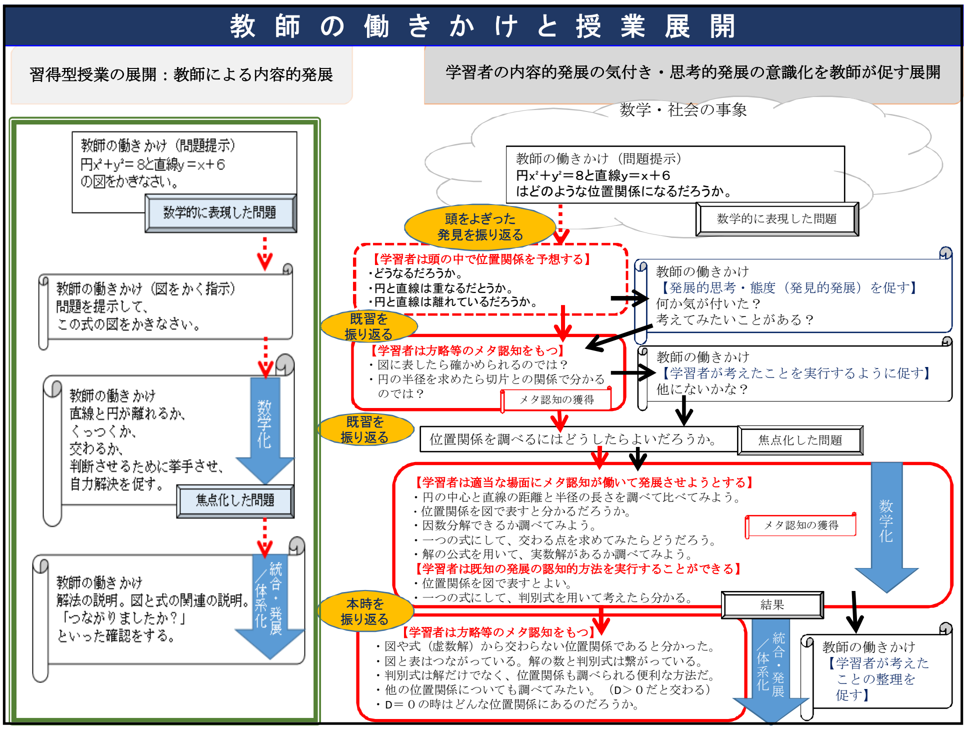
＜思考停滞の状況＞

A. メタ認知的知識がない

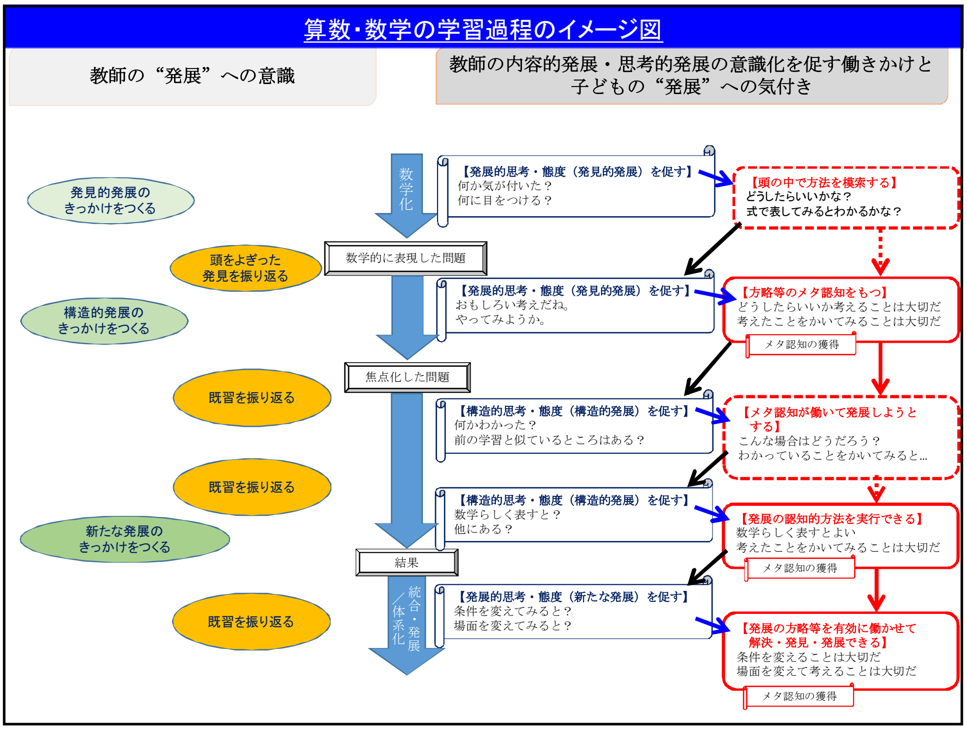
B. メタ認知的知識があってもアクセスできない

C. アクセスできてもその後の認知的行為が、想起できない

D. 想起できても記憶にアクセスできず活用に至らない

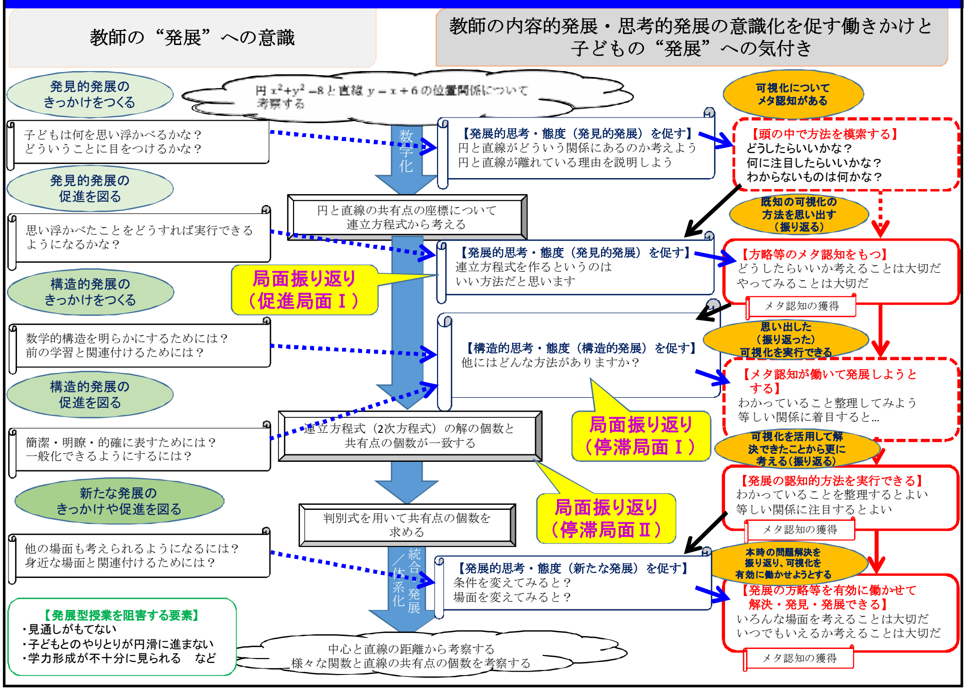


教師の働きかけと授業展開
習得型授業の展開：教師による内容的発展
学習者の内容的発展の気付き・思考的発展の意識化を教師が促す展開
教師の働きかけ（問題提示）
円$x^2+y^2=8$と直線$y=x+6$
の図をかきなさい。
数学的に表現した問題
教師の働きかけ（図をかく指示）
問題を提示して、
この式の図をかきなさい。
教師の働きかけ
直線と円が離れるか、
くっつくか、
交わるか、
判断させるために挙手させ、
自力解決を促す。
数学化
焦点化した問題
教師の働きかけ
解法の説明。図と式の関連の説明。
「つながりましたか？」
といった確認をする。
統合・発展／体系化
数学・社会の事象
教師の働きかけ（問題提示）
円$x^2+y^2=8$と直線$y=x+6$
はどのような位置関係になるだろうか。
数学的に表現した問題
頭をよぎった
発見を振り返る
【学習者は頭の中で位置関係を予想する】
・どうなるだろうか。
・円と直線は重なるだとうか。
・円と直線は離れているだろうか。
教師の働きかけ
【発展的思考・態度（発見的発展）を促す】
何か気が付いた？
考えてみたいことがある？
既習を
振り返る
【学習者は方略等のメタ認知をもつ】
・図に表したら確かめられるのでは？
・円の半径を求めたら切片との関係で分かるのでは？
メタ認知の獲得
教師の働きかけ
【学習者が考えたことを実行するように促す】
他にないかな？
既習を
振り返る
位置関係を調べるにはどうしたらよいだろうか。
焦点化した問題
【学習者は適当な場面にメタ認知が働いて発展させようとする】
・円の中心と直線の距離と半径の長さを調べて比べてみよう。
・位置関係を図で表すと分かるだろうか。
・因数分解できるか調べてみよう。
・一つの式にして、交わる点を求めてみたらどうだろう。
・解の公式を用いて、実数解があるか調べてみよう。
メタ認知の獲得
【学習者は既知の発展の認知的方法を実行することができる】
・位置関係を図で表すとよい。
・一つの式にして、判別式を用いて考えたら分かる。
数学化
結果
本時を
振り返る
【学習者は方略等のメタ認知をもつ】
・図や式（虚数解）から交わらない位置関係であると分かった。
・図と表はつながっている。解の数と判別式は繋がっている。
・判別式は解だけでなく、位置関係も調べられる便利な方法だ。
・他の位置関係についても調べてみたい。（$D>0$だと交わる）
・$D=0$の時はどんな位置関係にあるのだろうか。
統合・発展／体系化
教師の働きかけ
【学習者が考えたことの整理を促す】



算数・数学の学習過程のイメージ図
教師の“発展”への意識
教師の内容的発展・思考的発展の意識化を促す働きかけと子どもの“発展”への気付き
発見的発展の
きっかけをつくる
数学化
【発展的思考・態度（発見的発展）を促す】
何か気が付いた？
何に目をつける？
【頭の中で方法を模索する】
どうしたらいいかな？
式で表してみるとわかるかな？
頭をよぎった
発見を振り返る
数学的に表現した問題
【発展的思考・態度（発見的発展）を促す】
おもしろい考えだね。
やってみようか。
【方略等のメタ認知をもつ】
どうしたらいいか考えることは大切だ
考えたことをかいてみることは大切だ
メタ認知の獲得
構造的発展の
きっかけをつくる
焦点化した問題
既習を振り返る
【構造的思考・態度（構造的発展）を促す】
何かわかった？
前の学習と似ているところはある？
【メタ認知が働いて発展しようとする】
こんな場合はどうだろう？
わかっていることをかいてみると...
既習を振り返る
【構造的思考・態度（構造的発展）を促す】
数学らしく表すと？
他にある？
【発展の認知的方法を実行できる】
数学らしく表すとよい
考えたことをかいてみることは大切だ
メタ認知の獲得
新たな発展の
きっかけをつくる
結果
既習を振り返る
統合・発展／体系化
【発展的思考・態度（新たな発展）を促す】
条件を変えてみると？
場面を変えてみると？
【発展の方略等を有効に働かせて解決・発見・発展できる】
条件を変えることは大切だ
場面を変えて考えることは大切だ
メタ認知の獲得

発展的思考・態度の可視化モデル事例の考察（高校２年・図形と方程式）



４　成果と課題

＜成果＞

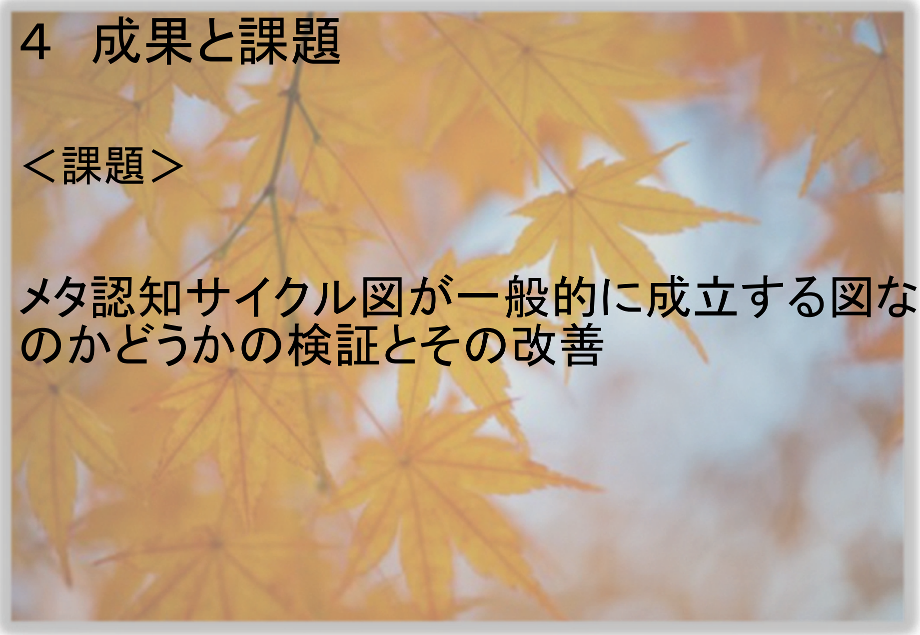
以下のことより、思考過程の可視化の必要性が見えた。

学習者側から考える必要があること

「思考停滞」、「メタ認知の弱さ」

教師側に必要なこと

「思考過程の認識」、「メタ認知的支援」、「振り返りの意識化」「学びのよさ（成功経験）の顕在化」



引用・参考文献

佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次（2016）.「発展的に考えること」の指導に関する教師の意識に関する調査，全国数学教育学会第43回研究発表会発表資料.

佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子（2017）. 学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発とその検証，数学教育学論究，99巻，臨時増刊号，pp.9～16.

重松敬一・勝美芳雄・高澤茂樹・上田喜彦・高井吾朗（2013）. 算数の授業で「メタ認知」を育てよう,日本文教出版.

清水美憲（2006）. 数学学習における「メタ思考」の顕在化とその促進に関する研究,数学教育学論究８６,pp.6-11.

G.Polya（1954）. いかにして問題をとくか， pp.Ⅴ . pp.25. pp.38.

重松敬一・勝美芳雄・上田喜彦（1993）. 数学教育におけるメタ認知の研究(8)―子どもへのメタ認知の内面化に関する調査研究ー. 第26回数学教育論文発表会論文集，pp.97-102.

伊藤啓・日野圭子（2014）. 算数科授業における子どもの「問い」をいかす教師の働きかけについての研究，宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要,第37号,pp.73-80

24