

算数・数学における
「自律的発展型授業」に関する質問紙調査
【報告書】

Questionnaire on "Lessons Where Students Think Autonomously and
Developmentally" in Mathematics Education

REPORT

「教師・学習者の発展的な思考・態度を習慣化する授業実践モデルの開発」
[基盤研究(C)研究課題：18K02518，研究期間：2018年4月1日～2023年3月31日]

研究代表者 佐藤 学 (秋田大学)
研究分担者 加藤 久恵 (兵庫教育大学)
新木 伸次 (国土舘大学)
研究協力者 重松 敬一 (奈良教育大学名誉教授)
椎名美穂子 (畿央大学)
黒田 大樹 (岐阜聖徳学園大学)
横 弥直浩 (奈良女子大学附属中等教育学校)

目次

1. 調査の概要	3
1-1. 調査目的	3
1-2. 調査対象	3
1-3. 調査内容	3
1-4. 調査方法	5
2. 分析結果	6
2-1. 校種や学生間の差異に着目した分析	6
2-2. 教職経験年数に着目した分析	12
2-3. 広域データと秋田データの分析	15
3. 参考資料	17
参考資料1：本研究における用語	17

○5つの知る	17
○自律的な思考の支援	17
○発展的思考	18
○発展3 授業	18
○発展3 状況	19
○発展的思考・態度の内面化モデル	20
○モデルシート	20
参考資料2：調査回答（Web画面イメージ）	22
参考資料3：調査全体の回答数	25
参考資料4：「a. 問題の解決」の回答傾向	26
参考資料5：「b. 解法の説明」の回答傾向	26
参考資料6：「c. 法則性の発見」の回答傾向	27
参考資料7：「d. 簡潔・明瞭・的確，一般化」の回答傾向	27
参考資料8：「e. 見方・考え方のよさ」の回答傾向	28
参考資料9：「f. 発展的考察」の回答傾向	28
参考資料10：「G. 問題の数値，条件，内容，配列」の回答傾向	29
参考資料11：「H. 想定と異なる学習者の解決」の回答傾向	29
参考資料12：「I. 学習者の困難への対応」の回答傾向	30
参考資料13：「J. 価値づけ」の回答傾向	30
参考資料14：「K. 多様な解決」の回答傾向	31
参考資料15：「L. 発展－習熟」の回答傾向	31
参考資料16：「M. 支援の見通し」の回答傾向	32
参考資料17：全国学力・学習状況調査の得点推移【小学校算数A/H19, 20, 29, 30比較】 33	
参考資料18：全国学力・学習状況調査の得点推移【小学校算数B/H19, 20, 29, 30比較】 34	
参考資料19：全国学力・学習状況調査の得点推移【中学校数学A/H19, 20, 29, 30比較】 35	
参考資料20：全国学力・学習状況調査の得点推移【中学校数学A/H19, 20, 29, 30比較】 36	
参考資料21：小4「イカ数問題」の問題例と一般的な展開	37
参考資料22：小4「イカ数問題」における発展型授業の違い	37
参考資料23：数学I「2次関数のグラフとx軸の位置関係」の問題例と一般的な展開	38
参考資料24：数学I「2次関数のグラフとx軸の位置関係」における発展型授業の違い	38
引用・参考文献一覧	39
本調査に関する発表等一覧	41
本研究に関する公開サイト	41

1. 調査の概要

1-1. 調査目的

平成 29 年告示小学校学習指導要領，中学校学習指導要領，平成 30 告示高等学校学習指導要領において，算数・数学の目標に「発展的に考察する」という文言がおよそ 50 年ぶりに復活した（文部科学省，2017a，2017b，2018）．先行研究では，発展的に考えることの意義や捉え方が示され，指導法の有効性も明らかにされている（中島，1982；沢田他，1980）．しかしながら，本研究で観察してきた算数・数学授業では，内容的発展習得型授業¹⁾，指導的発展型授業²⁾が多く，学習者の意思が働いて発展³状況³⁾が展開する「自律的発展型授業」は少ない実態が見られた．

自律的発展型授業の実現には，学習者の意思が働いて発展的に展開する数学的活動となるよう，教師が支援することが重要であり，教師の意識が影響する．そこで，本調査では，自律的発展型授業に関する教師の意識を捉え，指導への示唆を得るため，質問紙調査の作成と分析を行った．

1-2. 調査対象

調査に関しては，学会や研究会を通しメールや電話依頼による協力を得て行った．

37 都道府県から 594 名の回答が得られ，その内訳は，小学校教員 256 名，中学校教員 154 名，高等学校教員 68 名，大学教員 42 名，学生・院生 74 名であった．なお，義務教育学校教員 7 名，中等教育学校教員 2 名，教育委員会・高等学校・教育センター等に勤務の者 18 名，無職の者 6 名の回答は選択問題から各校種に割り振った（参考資料 3）．

1-3. 調査内容

本調査は，次のように構成している．

第一部：個人の属性に関する質問項目

- ・都道府県，勤務校種，教職経験年数

第二部：問題の選択と授業構想時，授業実践時の質問項目

- ・問題の選択
- ・授業構想時の質問項目（表 2，a～f）
- ・授業実践時の質問項目（表 2，G～M）

第三部：自由記述

- ・全回答を終えての感想，意見．第一部，第二部は必須回答．

Web フォームによる回答とし，第一部，第二部はプルダウンメニュー（参考資料 1）からの選択で回答は必須とした．第三部は自由回答とした．

① 問題の選択（表 1）

小 1 問題～中 3 問題，数 I 問題の例示し，具体的な問題をイメージして，授業構想時，授業実践時の質問項目に回答してもらう．

表 1：選択問題

問題		想定した多様な解決方法
小 1	8+6 の計算をしましょう.	加数分解, 被加法分解による計算.
小 2	8 の段の九九をつくりましょう.	累加, 交換法則, 分配法則による構成.
小 3	1 組と 2 組の好きな遊び調べの人数をグラフに表しましょう.	棒グラフの対比表現, 積み上げ表現.
小 4	L 字型の図形の面積を, 辺の長さを測って求めましょう.	分割, 補完, 移動による求積.
小 5	ひし形の面積を求めましょう.	等積変形, 倍積変形による求積.
小 6	$3/5 \div 1/3$ の計算をしましょう.	数直線図, 面積図, 計算法則による解決.
中 1	マッチ棒を並べて横 1 列に正方形を 5 個つくるとき, マッチ棒は少なくとも何本必要ですか.	$4+3 \times 4$, $4 \times 5 - 4$, $5 \times 2 + 6$, $1+3 \times 5$ の囲み方による解決.
中 2	$x+y=7$, $2x+7y=10$ の 2 直線の交点の座標を求めなさい.	座標の読み, 連立方程式による解決.
中 3	連続する 2 つの偶数の積に 1 をたした数は, どのような数になりますか.	「 $2n$, $2n+2$ 」とおく解決, 「 $2n-2$, $2n$ 」とおく解決.
数 I	3 点(-1, 0), (3, 0), (5, 6)を通る 2 次関数を求めよ.	$y=ax^2+bx+c$ とおく解決, $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおく解決.

② 授業構想時, 授業実践時の質問項目 (表 2)

教師には, 指導対象の問題や内容を解決者として捉える授業構想時の意識 (表 1, a~f) と, 学習者の数学的活動を教育者として捉える授業実践時の意識 (G~M) があるとして, 各質問項目を構成した. また, アーネスト (2015) の絶対主義, 可謬主義を参考にして, 教師の意識には, 学習者の問題解決を制御したいとする絶対的固定的な見方・考え方, 学習者の自律的な問題解決を支援したいとする可謬的可變的な見方・考え方が現れると想定し, 2 つの見方・考え方を対立的に例示し 5 件法回答で反応を得ることにした. これにより, 授業構想時, 授業実践時の傾向と, その特徴の分析が可能と考えた.

表 2：質問紙調査の内容と構成

質問項目	可謬的可變的な見方・考え方	絶対的固定的な見方・考え方
a. 問題の解決	◆本問題が解ける. 教えることが分かる.	本問題が解けない, 解けても不安が残る. 教えることがよく分からない.
b. 解法の説明	◆本問題の解法を具体的に, または論理的に説明できる.	本問題の解法を具体的に, または論理的に説明できない. または, 説明できるが, 簡潔さ, 明瞭さ, 的確さに欠ける.
c. 法則性の発見	◆本問題を解決した結果から法則性を見つけることが楽しめる.	本問題を解決した結果から法則性を見つけることが楽しめない.

d. 簡潔・明瞭・的確，一般化	◆本問題の解決について，より簡潔にできないか，より一般的にできないか，より分かりやすくできないか，と考える。	本問題の解決について，より簡潔にできないか，より一般的にできないか，より分かりやすくできないか，と考えない，解決できたらよい。
e. 見方・考え方のよさ	◆本問題の解決から，新たに得た知識や解決方法に含まれた見方・考え方のよさが分かる。	本問題の解決から，新たに得た知識や解決方法に含まれた見方・考え方のよさがよく分からない，気づかない。
f. 発展的考察	◆本問題の解決から，新たに得た知識や解決方法を，数量や条件，場面を変えて適用，実用できないか，発展的に考える。	本問題の解決から，新たに得た知識や解決方法を，数量や条件，場面を変えて適用，実用できないか，発展的に考えない，これ以上考えたくない。
G. 問題の数値，条件，内容，配列	問題の数値，条件，内容，配列には意味があるもののこの限りではないとして，本問題の指導ではそのまま使わない。	◆問題の数値，条件，内容，配列には意味があるので，本問題の指導にあたってはそのまま使う。
H. 想定と異なる学習者の解決	◆本問題における学習者の解決が想定と異なる場合（解決の多様さ，難易），新たな発見として一緒に楽しむ。	本問題における学習者の解決が想定と異なる場合（解決の多様さ，難易），対処に困惑する，楽しめない。
I. 学習者の困難への対応	本問題の解決において，学習者の思考が進んでない場合は，学習者の気付きを待つ。	◆本問題の解決において，学習者の思考が進んでない場合は，学習者の思考を促す支援をすぐ行う。
J. 価値づけ	◆本問題における学習者の解決に起因するよさ，面白さを価値付けられる。	本問題における学習者の解決に起因するよさ，面白さを見過ごす，価値付けられない。
K. 多様な解決	本問題の解決が困難な問題でも，多様に考えることを促す。	◆本問題の解決が困難な問題は，学習者の理解を考慮して，解決方法を限定したり，提示したりする。
L. 発展一習熟	本問題を解決した後は，学習内容が適用できる範囲を明らかにするため，発展的に考えることを求める。	◆本問題を解決した後は，学習内容が定着するよう習熟を図る。
M. 支援の見通し	◆本問題の解決における学習者が求める支援が分かる。	本問題の解決における学習者への支援がよく分からない。

*各質問において可謬的可変的な見方・考え方と絶対的固定的な見方・考え方で異なりは，太字で示している。

*5件法回答は，1，2の回答を可謬的可変的な見方・考え方，4，5の回答を絶対的固定的な見方・考え方とした。

*◆：傾向の想定。

1-4. 調査方法

調査の依頼は，標本抽出法を用いていない。学会・研究会を通じて，個々の教員にメールで依頼したが，十分な量の回答が得られなかったため，小，中，高の各校に電話で依頼した。その際，小については，研究意識の高い教員に偏らないよう，秋田県小学校については算数を専門としない教員にも回答してもらうよう依頼した。調査期間は，2021年5月～7月であった。

（文責：佐藤 学）

2. 分析結果

得られた回答データを、「校種や学生間の差異 (2-1)」「教職経験年数 (2-2)」「広域データと秋田データの対比 (2-3)」を観点にして分析した。それぞれの分析にあたり、対象にした回答データは、表 3 のとおりである。

表 3：分析の観点と対象にした回答データ (名)

	教員				学生	計
	小学校	中学校	高校	大学		
秋田データ	124 ^a	71 ^a	35 ^a	1	51	282
広域データ	132 ^b	82 ^b	33 ^b	40 ^c	24 ^c	311
全データ	256	153	68	41	75	593
小中高計	477					
5年未満	58 ^d					
5年以上～10年未満	68 ^d					
10年以上～20年未満	161 ^d					
20年以上	190 ^d					

*校種や学生間の差異の分析対象データ：b, c のデータ
 *教職経験年数 (2-2) の分析対象データ：d のデータ
 *広域データと秋田データの対比 (2-3)：a, b のデータ

(文責：佐藤 学)

2-1. 校種や学生間の差異に着目した分析

「自律的発展型授業」に関する質問紙調査の分析により、自律的発展型授業に対する意識の校種等の違いによる特徴を明らかにする。分析方法としては、平均値、標準偏差、中央値、回答傾向を用いる。

まず、全体結果を示す。

授業構想時の全体結果は、表 4 のとおりである。

どの項目・どの校種についても平均値及び中央値がともに 3 未満の値を示しており、「可謬的可変的な見方・考え方」を示している。

表 4：授業構想時の全体結果

質問項目	平均値	標準偏差	中央値
a. 問題の解決	1.16	0.52	1
b. 解法の説明	1.29	0.65	1
c. 法則性の発見	1.42	0.77	1
d. 簡潔・明瞭・的確、一般化	1.48	0.75	1
e. 見方・考え方のよさ	1.51	0.74	1
f. 発展的考察	1.58	0.80	1

授業実践時の全体結果は、表 5 のとおりである。

授業構想時に比べ、標準偏差が1より大きい回答にばらつきが見られる項目がある。

次に、特徴的な「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」「H. 想定と異なる学習者の解決」「I. 学習者の困難への対応」「K. 多様な解決」に注目する。

「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」は平均値が3より大きく、中央値が3である。「H. 想定と異なる学習者の解決」は、学生を除く校種で平均値が2未満及び中央値が1である。「I. 学習者の困難への対応」は平均値が3に近く、中央値が3である。「K. 多様な解決」は全体を見ると平均値, 中央値ともに3未満であるが、高校に特徴がある。

表5：授業実践時の全体結果

質問項目	平均値	標準偏差	中央値
G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列	3.12	1.28	3
H. 想定と異なる学習者の解決	1.54	0.83	1
I. 学習者の困難への対応	2.78	1.06	3
J. 価値づけ	1.78	0.80	2
K. 多様な解決	2.36	1.19	2
L. 発展－習熟	2.24	1.15	2
M. 支援の見通し	1.95	0.85	2

さらに、「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」「H. 想定と異なる学習者の解決」「I. 学習者の困難への対応」「K. 多様な解決」の回答傾向を、校種別・学生間の差異を見る。

表6は「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」の回答傾向を示したものである.

どの校種においても3の前後でばらついており, 可謬的可變的な見方・考え方と絶対的固定的な見方・考え方の中で揺れ動いている. なお, 大学教員は1までばらつくが, 他校種は1が減る.

表6: 「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	34	76	79	62	60	3.12	1.28	3.00
	下段 (%)	100.0	10.9	24.4	25.4	19.9	19.3			
校種等	小学校	132	12	34	33	27	26	3.16	1.27	3.00
		100.0	9.1	25.8	25.0	20.5	19.7			
	中学校	82	10	19	21	18	14	3.09	1.28	3.00
		100.0	12.2	23.2	25.6	22.0	17.1			
	高校	33	1	9	7	9	7	3.36	1.19	3.00
		100.0	3.0	27.3	21.2	27.3	21.2			
	学生	24	2	6	8	5	3	3.04	1.16	3.00
		100.0	8.3	25.0	33.3	20.8	12.5			
	大学	40	9	8	10	3	10	2.93	1.49	3.00
		100.0	22.5	20.0	25.0	7.5	25.0			

表7は「H. 想定と異なる学習者の解決」の回答傾向を示したものである。
 どの校種においても「可謬的可変的な見方・考え方」である。
 学生は他校種と比べ、平均値・中央値が2以上でばらつきが大きい。

表7: 「H. 想定と異なる学習者の解決」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可変的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段(名)	311	193	81	25	10	2	1.54	0.83	1.00
	下段(%)	100.0	62.1	26.0	8.0	3.2	0.6			
校種等	小学校	132	73	42	13	4	0	1.61	0.79	1.00
		100.0	55.3	31.8	9.8	3.0	0.0			
	中学校	82	59	19	4	0	0	1.33	0.57	1.00
		100.0	72.0	23.2	4.9	0.0	0.0			
	高校	33	22	6	2	3	0	1.58	0.97	1.00
		100.0	66.7	18.2	6.1	9.1	0.0			
	学生	24	5	10	5	2	2	2.42	1.18	2.00
		100.0	20.8	41.7	20.8	8.3	8.3			
	大学	40	34	4	1	1	0	1.23	0.62	1.00
		100.0	85.0	10.0	2.5	2.5	0.0			

表8は「I. 学習者の困難への対応」の回答傾向を示したものである。

高校は4の割合が大きい。高校以外は平均値が3未満であるが、どの校種においても中央値が3でばらついており、可謬的可変的な見方・考え方と絶対的固定的な見方・考え方の間で揺れ動いている。

表8：「I. 学習者の困難への対応」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可変的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段(名)	311	38	85	109	64	15	2.78	1.06	3.00
	下段(%)	100.0	12.2	27.3	35.0	20.6	4.8			
校種等	小学校	132	14	48	38	29	3	2.69	1.00	3.00
		100.0	10.6	36.4	28.8	22.0	2.3			
	中学校	82	10	19	35	15	3	2.78	1.01	3.00
		100.0	12.2	23.2	42.7	18.3	3.7			
	高校	33	2	6	11	10	4	3.24	1.09	3.00
		100.0	6.1	18.2	33.3	30.3	12.1			
	学生	24	1	8	8	5	2	2.96	1.04	3.00
		100.0	4.2	33.3	33.3	20.8	8.3			
	大学	40	11	4	17	5	3	2.63	1.23	3.00
		100.0	27.5	10.0	42.5	12.5	7.5			

表9は「K. 多様な解決」の回答傾向を示したものである。

高校以外は平均値及び中央値が3未満であるが、高校は中央値が3で、いずれもばらつきがある。つまり、高校は、可謬的可變的な見方・考え方とはいえず、絶対的固定的な見方・考え方も表れる。

大学教員は他と異なり、可謬的可變的な見方・考え方が強い。

表9：「K. 多様な解決」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的な回答		絶対的固定的な回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	95	89	56	63	8	2.36	1.19	2.00
	下段 (%)	100.0	30.5	28.6	18.0	20.3	2.6			
校種等	小学校	132	34	40	23	33	2	2.46	1.17	2.00
		100.0	25.8	30.3	17.4	25.0	1.5			
	中学校	82	31	18	18	12	3	2.24	1.21	2.00
		100.0	37.8	22.0	22.0	14.6	3.7			
	高校	33	3	13	7	10	0	2.73	1.01	3.00
		100.0	9.1	39.4	21.2	30.3	0.0			
	学生	24	4	8	5	4	3	2.75	1.29	2.50
		100.0	16.7	33.3	20.8	16.7	12.5			
	大学	40	23	10	3	4	0	1.70	0.99	1.00
		100.0	57.5	25.0	7.5	10.0	0.0			

これまでの分析から、共通して「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」「I. 学習者の困難への対応」で可謬的可變的な見方・考え方と絶対的固定的な見方・考え方の間で揺れ動く様子がみられる。

「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」が「問題の数値, 条件, 内容, 配列には意味があるもののこの限りではないとして、本問題の指導ではそのまま使わない(可謬的可變的な見方・考え方)」と「問題の数値, 条件, 内容, 配列には意味があるので、本問題の指導にあたってはそのまま使う(絶対的固定的な見方・考え方)」の間で揺れ動く様子は、教科書で示された問題をどのようにとらえているか、それを指導でどのように活かすかという点で教師によって捉え方が異なるのではないかと考えられる。

また、「I. 学習者の困難への対応」において「本問題の解決において、学習者の思考が進んでいない場合は、学習者の気づきを待つ(可謬的可變的な見方・考え方)」と「本問題の解決において、学習者の思考が進んでいない場合は、学習者の思考を促す支援をすぐ行う(絶対的固定的な見方・考え方)」の間で揺れ動く様子は、「学習者の思考が進んでいない」という状況をどのように解釈するのかが回答者で異なるのではないかと、研修では具体的な事例でその解釈を議論しなければ、「気づきを待つ」のか「支援をすぐ行う」必要があるのかが焦点化されない可能性がある。

一方、高等学校では「K. 多様な解決」では、可謬的可變的な見方・考え方(本問題の解決が

困難な問題でも、多様に考えることを促す)とはいえず、絶対的固定的な見方・考え方(本問題の解決が困難な問題は、学習者の理解を考慮して、解決方法を限定したり、提示したりする)も表れる様子がみられる。これは、解決が困難な問題に対して多様に考える価値をどう捉えるか、学習者をどのように捉えるかで対応が異なるのではないかと、研修では多様に考える価値が明確になるような事例で議論する必要がある。「G. 問題の数値、条件、内容、配列」や「I. 学習者の困難への対応」に関連して、数学 I 「数と式」における次の問題(図 1)を例にして、可謬的可変的な見方・考え方へと変容するための視点を考えてみる。例えば、分母の有理化を学習したあとで、教科書に示された(1)、(2)、(3)の配列で指導するか、配列を変えて指導するか、それはなぜなのか、考えてみてはどうだろうか。学習者が解決に困難を示しているときに、有理化に限定せず、多様に考えることを促すか、有理化に限定し、解決方法を提示するか、それはなぜなのかを考えてみてはどうだろうか。

$$x = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, y = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{ のとき、次の式の値を求めよ.}$$

(1) $x + y$ (2) xy (3) $x^2 + y^2$

図 1：数学 I 「数と式」における問題

(文責：新木 伸次)

2-2. 教職経験年数に着目した分析

各教員の発展的な課題に対する捉えを明らかにするため、質問項目のうち、「L. 発展-習熟」とその他の項目について相関係数に着目して分析を行った。相関係数に着目することで、「発展-習熟」に関して、どのような指導を行っているかが明らかになると考えた。

表 10：「発展-習熟」の回答傾向

教職経験年数	「発展-習熟」の回答					発展-習熟の 平均値
	発展よりの回答		習熟よりの回答			
	1	2	3	4	5	
5年未満	13.8%	31.0%	20.7%	19.0%	15.5%	2.91
5年以上～10年未満	14.7%	33.8%	22.1%	22.1%	7.4%	2.74
10年以上～20年未満	28.6%	32.9%	16.1%	15.5%	6.8%	2.39
20年以上	27.9%	25.3%	22.6%	16.8%	7.4%	2.51

表 10 は、教職経験年数別に、「L. 発展-習熟」の回答傾向を示したものである。

「L. 発展-習熟」の平均点について、教職経験年数 5 年未満の教員と比較すると、教職経験 10 年以上 20 年未満の教員 ($p=0.007<0.05$) および教職経験 20 年以上の教員 ($p=0.03<0.05$) との間で有意差がみられ、教職経験を積むことで、学習内容が定着するよう習熟を図るよりも、学習

内容が適用できる範囲を明らかにするため、発展的に考えることを求める傾向がみられる。

続いて、教職経験年数別に、「L. 発展－習熟」と相関関係がある項目を調べた。表 11 がその結果である。

表 11：「L. 発展－習熟」と相関関係がある項目

教職経験年数	「発展－習熟」との正の相関 (相関係数 0.4 以上 0.7 未満)	「発展－習熟」との弱い正の相関 (相関係数 0.2 以上 0.4 未満)
5 年未満	「K. 多様な解決」	「I. 学習者の困難への対応」 「J. 価値づけ」などの 4 項目
5 年以上～10 年未満	「I. 学習者の困難への対応」	「J. 価値づけ」, 「f. 発展的考察」, 「K. 多様な解決」などの 10 項目
10 年以上～20 年未満	「K. 多様な解決」 「I. 学習者の困難への対応」 「J. 価値づけ」	「c. 法則性の発見」「f. 発展的考察」 などの 9 項目
20 年以上	「K. 多様な解決」	「I. 学習者の困難への対応」

いずれの年数にも「K. 多様な解決」「I. 学習者の困難への対応」が含まれている。教職経験年数 5 年未満では、「L. 発展－習熟」と「K. 多様な解決」が正の相関がみられ、教職経験年数 5 年以上になると、「I. 学習者の困難への対応」と正の相関がみられる。一方で、教職経験年数 5 年以上 20 年未満は、「L. 発展－習熟」と弱い正の相関がある項目が多岐にわたり、その在り方を模索している様相がみられる。これが教職経験年数 20 年以上になると、「L. 発展－習熟」の在り方が確立されている。

さらに、「L. 発展－習熟」と「K. 多様な解決」「I. 学習者の困難への対応」に絞って相関関係を見ると、表 12 のように整理できる。

表 13：「L. 発展－習熟」と「K. 多様な解決」「I. 学習者の困難への対応」の相関関係

教職経験年数	多様な解決	学習者の困難への対応
5 年未満	◎	○
5 年以上～10 年未満	○	◎
10 年以上～20 年未満	◎	◎
20 年以上	◎	○

*◎：正の相関，○：弱い正の相関

「K. 多様な解決」については、「L. 発展－習熟」の有意差を考慮すれば、教職経験年数 5 年未満では、学習内容が定着するよう習熟を図り、解決方法を限定したり提示したりするものの、教職経験年数 10 年以上になると、より発展的に考えることを求め、多様に考えることを促していると解釈できる。

また、「I. 学習者の困難への対応」については、「L. 発展－習熟」の有意差を考慮すれば、教職経験年数 5 年未満では、学習者の思考が進んでない場合は、学習者の思考を促す支援をすぐ行

う傾向がみられるものの、教職経験年数 10 年以上になると、学習者の思考が進んでない場合は、学習者の気付きを待つ傾向がみられる。

これまでの結果を踏まえ、教職経験年数別の傾向を整理すると、表 14 になる。

表 14：「L. 発展－習熟」に関する教職経験年数別の傾向

教職経験年数	「発展－習熟」に関する傾向
5 年未満	学習内容が定着するよう習熟を図り、解決方法を限定したり提示したりする。
5 年以上～10 年未満	学習者の取り組みにも目を向けられるようになると同時に、「発展－習熟」の在り方を模索し始める。
10 年以上～20 年未満	より発展的に考えることを求め、多様に考えることを促すことができるようになると同時に、「発展－習熟」の在り方については模索中である。
20 年以上	より発展的に考えることを求め、学習者の思考が進んでない場合は学習者の気付きを待つこともできる。また、「発展－習熟」の在り方が確立されていく。

これまでの分析と考察を踏まえ、「自律的発展型授業」の実現に向けた研修として表 15 に示す示唆が得られた。

表 15：教職経験年数に着目した分析から得られた「自律的発展型授業」の実現に向けた研修への示唆

教職経験年数	「自律的発展型授業」の実現に向けた研修の在り方
5 年未満	思考的発展を意識できるような研修
5 年以上～10 年未満	内容的発展と思考的発展のバランスを意識できるような研修
10 年以上～20 年未満	学習者の意思が働いて、発展 3 状況が展開される「自律的発展型授業」の重要性が意識されるような研修
20 年以上	① 教職経験年数が浅い教員に向けて、指導的な立場で「自律的発展型授業」の示範授業を展開するような研修 ② 校内研修体制などが構築できるような研修

(文責：黒田 大樹)

2-3. 広域データと秋田データの分析

秋田県は、全国学力・学習状況調査の第1回以来、13年連続して良好な成績であり、注目に値する。そこで、本研究では、算数・数学における「自律的発展型授業」に関する質問紙調査をもとに、秋田県における「自律的発展型授業」の特徴を、広域データと秋田データの対比から明らかにし、指導への示唆を得ることを目的とする。

広域データと秋田データの回答傾向を対比するため、13の質問項目について校種別にt検定を行い、平均値と併せて分析、考察する。

表15は、広域データと秋田データの平均値とt検定(p値)の結果をまとめたものである。

表15：広域データと秋田データの平均値とt検定(p値)の結果

	小学校			中学校			高校		
	広	秋	p値	広	秋	p値	広	秋	p値
a. 問題の解決	1.20	1.15	0.5087	1.13	1.01	0.0527	1.00	1.03	—
b. 解法の説明	1.36	1.32	0.6965	1.22	1.15	0.4478	1.00	1.06	—
c. 法則性の発見	1.49	1.54	0.6418	1.30	1.27	0.7230	1.36	1.37	0.9671
d. 簡潔・明瞭・的確，一般化	1.55	1.50	0.6270	1.37	1.28	0.4636	1.58	1.29	0.0769
e. 見方・考え方のよさ	1.54	1.69	0.1194	1.48	1.37	0.2897	1.48	1.46	0.8680
f. 発展的考察	1.67	1.72	0.6185	1.35	1.51	0.1682	1.64	1.49	0.3928
G. 問題の数値，条件，内容，配列	3.16	3.53	0.0237	3.09	3.30	0.3197	3.36	3.40	0.9111
H. 想定と異なる学習者の解決	1.61	1.77	0.1056	1.33	1.59	0.0172	1.58	1.54	0.8842
I. 学習者の困難への対応	2.69	3.13	0.0011	2.78	3.20	0.0140	3.24	2.80	0.1059
J. 価値づけ	1.82	1.93	0.2751	1.66	1.75	0.4730	2.12	1.89	0.3244
K. 多様な解決	2.46	2.86	0.0087	2.24	2.77	0.0119	2.73	2.63	0.7430
L. 発展—習熟	2.48	3.08	0.0002	1.99	2.52	0.0031	2.52	2.34	0.5701
M. 支援の見通し	2.00	1.79	0.0282	1.88	1.68	0.0857	2.03	1.63	0.0446

*広：広域データ，秋：秋田データ

*p値=0.0011<0.01

広域データと秋田データの有意差は、小学校3項目、中学校1項目、高校0項目と少なく、地域性による「自律的発展型授業」に関する教師の意識に差は見られないといえる。特に、高校では顕著であった。

表16は、有意差のあった3項目と「G. 問題の数値，条件，内容，配」に絞って示したものである。

有意差のあった3項目は、いずれの平均値も「秋田データ>広域データ」となっている」「発展—習熟」の質問項目が含まれている」であり、秋田県の教員は、学習内容の定着を図りたいとする意識が高いといえる。

また、「問題の数値，条件，内容，配列」は変えられないとする意識はかなり高い。

表 16：習熟の意識が現れているデータ

	小学校			中学校		
	広域	秋田	p 値	広域	秋田	p 値
G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列	3.16	< 3.53	0.0237	3.09	< 3.30	0.3197
I. 学習者の困難への対応	2.69	< 3.13	0.0011	2.78	< 3.20	0.0140
K. 多様な解決	2.46	< 2.86	0.0087	2.24	< 2.77	0.0119
L. 発展－習熟	2.48	< 3.08	0.0002	1.99	< 2.52	0.0031

*広域：広域データ，秋田：秋田データ

*p 値=0.0011<0.01

広域データ，秋田データの対比分析から，両者は類似する傾向である一方，秋田県の小，中学校の教員の意識は，可謬的可変的な見方・考え方とは言い切れない傾向であることが見えた．学習者の問題解決に取り組む意識に目を向けた支援が求められる．

(文責：佐藤 学)

3. 参考資料

参考資料1：本研究における用語

○5つの知る

段階的授業モデルから抽出した「教材を知る」「反応を知る」「思考を知る」「展開を知る」「数学することを知る」を、授業評価ルーブリックとして援用できるとして、それぞれの基準と解釈を精緻した。

[参照]「教材を知る」段階

基本的な教授原理に基づいて実践することに始まり、教科書の記述に留まらない問題の扱いによって学習者の思考を発展させようとする段階。この段階では、内容的発展を志向する傾向が強い。

[参照]「反応を知る」段階

学習者の反応にも注目するようになり、学習者の達成または不達成の状況の要因を、学習者の反応から捉えようとする段階。この段階から、内容的発展と思考的発展が相互に作用する。

[参照]「思考を知る」段階

一連の発話群の反応から思考過程を解釈し、次の反応を予想しようとする。

[参照]「展開を知る」段階

発展3状況を踏まえた授業展開を設計し、学習者の状況に応じながら指導・支援をしようとする段階。この段階では、思考的発展を志向しながら、内容的発展と思考的発展が相互作用する。

[参照]「数学をすることを 知る」段階

「教材を知る」「子供の反応を知る」「子供の思考を知る」「授業展開を知る」は、教師が数学をどのような立場から捉えるかによって、異なる。

アーネスト（2015）の絶対主義、可謬主義を参考にして、「数学をすることを知る」段階における教師の意識には、学習者の問題解決を制御したいとする絶対的固定的な見方・考え方、学習者の自律的な問題解決を支援したいとする可謬的可変的な見方・考え方が現れる。

○自律的な思考の支援

重松（2013）の「全体の代行（モデルとしての役割）」「部分的な代行（モニターとしての役割）」「部分的な代行（評価としての役割）」、椎名（2019）の「積極的支援」「半消極的支援」「消極的支援」、佐藤他のモデルプレート（佐藤他，2017a；佐藤，2020）を参考に、認知的支援要素、メタ認知的支援要素からなる自律的な思考の支援を捉える視点を整理した。

[参照] 認知的支援要素

一般的に教師は、数学的思考の対象である「数学的对象」と、数学的对象について数学的思考のきっかけとなる「数

学的気付き」から成る発話により、数学的思考を促す支援を行っている。数学的对象について「余り2は」と具体的に上げることや、数学的気付きについて「どのような意味ですか」と思考の方向性を明確にすることは、学習者の認知的活動に直接作用する要素であることから、数学的对象、数学的気付きが認知的支援要素となっているとする。

[参照] メタ認知的支援要素

学習者が数学的对象に注目していると見て暗黙的にすることや、学習者から数学的気付きが発生するとして「何か気付いた？」と問うことは、何か思考している自分自身に気付かせる働きかけである。つまり、数学的对象、数学的気付きがメタ認知的支援要素となっているとする。

○発展的思考

学習者の発見的な気付きをきっかけにして問題解決し、新たに見出し構造化した概念や性質を、より広い立場にも適用しようと発展させること。その過程は、「発見的発展」「構造的発展」「新たな発展」の発展3状況から捉えられる。統合的、発展的な考察（中島，1982；文部省，1968・1969）が集合、拡張、補完を観点にした内容的な発展、指導的な発展であるのに対して、算数・数学を学習者が主体的に発展させていくことから思考的な発展、学習的な発展とみることができる。

発展的思考は、学習者が主体的に発展させることで、内容的にも統合・発展を繰り返して高次化していく。

[参照] 内容的発展

教師の発展的思考・態度に対する意識の変容を捉える方向性の1つであり、学習内容の発展性を示す。小4「何百何十÷何十で余りのある除法」であれば、例えば、何百何十÷何十の計算を基にして、何千何百÷何百、何万何千÷何千の計算へと数の範囲を広げること。

[参照] 思考的発展

教師の発展的思考・態度に対する意識の変容を捉える方向性の1つであり、学習者の発展性を促す思考を示す。小4「何百何十÷何十で余りのある除法」であれば、例えば、何百何十÷何十の余りについて10のまとまりにして処理することに注目し、10以外のまとまりはないかと考えること。

○発展3授業

発展的思考・態度を視点にした授業の類型。

[参照] 内容的発展習得型授業

既知を発展した内容の習得は見られるが、新たな発展のない授業。

[参照] 指導的発展型授業

教師主導で新たな発展が展開する授業。

[参照] 自律的発展型授業

学習者の意思が働いて発展3状況が展開している授業。

○発展 3 状況

発展的思考・態度について、「発見的発展」「構造的発展」「発見的発展」の過程から捉えたもの。

[参照] 発見的発展

構造的発展のきっかけを生み出す、当面の問題（狭義の意味）から次の問題（狭義の意味）へと発見的な気づきの過程。

教科書を使った学習を例にすると、教師が提示した問題について、数量や図形及びそれらの関係に着目したり分析したりして、数学的に表現した問題として捉える。

[参照] 構造的発展

構造化に向けて新しく見出した概念や性質をより広い立場にも適用しようとすることの「統合」の働きと、その構造化に向けた「簡潔・明瞭・的確」と「一般化」の働きと、その過程。

[参照] 新たな発展

発見的発展の過程で得た知的欲求により、構造化した概念や性質を、「数値を変える」「場面を変える」「数値と場面を変える」「考察の視点を変える」を行い、新たに発展させる過程。

○発展的思考・態度の内面化モデル

「メタ認知の内面化の過程のモデル（重松他，1993）」を参考に設定したものである。

- 教師から学習者にモデルプレートを提示する。
- ① 学習者が，モデルプレートを受け止める気持ちになっている。
- ② 教師がモデルプレートに示した営みを口癖または行動癖として示す。
- ③ 学習者が，教師が示す口癖または行動癖から発展的に考えることの営みに気付き，一時的に記憶する。
- ④ 問題解決や学習のプロセスにおいて一時的に記憶された発展的に考えることの営みを意識する。
- ⑤ 問題解決や学習のプロセスにおいて意識している発展的に考えることの営みを実行する。
- ⑥ ⑤によって発展的に考えることができ，認知的にもうまくいったことを確認する。
- ⑦ 学習者が，この発展的に考えることの営みを内面的な口癖または行動癖として獲得する。

○モデルシート

学習者にとって発展的に考える姿の範となる行為（教師の口癖や態度癖等）を，学習者にモデルとなる働きかけとして提示するもの。学習者はモデルシートを参照し，発展的に考えることの営みを実行する。

実践事例の分析から，学習者の発見的発展の構えや構造的発展の構えを形成すること，発見的発展から構造的発展へと展開する過程における気付きを促すことや顕在化することにおいて，教師の口癖や態度癖が作用することが抽出できた。そこで，「発見的発展」→「構造的発展」→「新たな発展」という『発展の状況』と，それぞれの状況における『具体的な数学的活動の局面』と，前述の実践事例の分析から抽出した『学習者の心理』から構造化した。また，モデルシートの具体的な内容は，ポリア（1954）の問いや注意，指導事例に見られた教師の発話を参考にして開発した。

具体的には，次表のとおりである。

モデルシート

発展の状況	具体的な数学的活動の局面	学習者の心理	必ず 言う		時間があつたら言う
			必ず 言う	できたら 言う	
発見的 発展	a. 数量や図形及びそれらの関係に着目する(問題解決の対象化)	気付き	知的 興奮	a1. 何に目をつける?(幹)	
				a2. 何(何と何)を調べる?	
	b. 着目した数量や図形及びそれらの関係について分析する	気付き		b1. 何か気付いた?(幹)	
				b2. 調べてみたいことがある?	
				b3. 考えてみたいことがある?	
				b4. 今までとどこが違う?	
	h. 数量や図形及びそれらの関係について無意図的に着目・分析する.	気付き		h1. 面白い考えだね.	
				h2. やってみようか.	
構造的 発展	c. 発見的発展の過程を振り返って数学的構造を明らかにする.	困難	↓	c1. 何か分かった?	
				c2. 何から分かった?	
	d. 既知を振り返って統合する.	確信		c3. 前の学習と似ているところはある?	
	e. 簡潔・明瞭・的確に表す.			d1. 同じところはある?	
	f. 一般化する.			d2. 他にあるか?	
				e1. 簡単に分かりやすく表すと?	
		e2. 算数(または数学)らしく表すと?			
		f1. いつでもいえる?			
新たな 発展	g. 明らかにした数学的構造と既知や身の回りの問題を振り返って, さらに発展的に考える.	気付き	g1. この後どんなことができるのか.(幹)		
			g2. 数量を変えてみると?		
			g3. 条件を変えてみると?		
			g4. 場面を変えてみると?		
			g5. 視点を変えてみると?		

幹となるモデルシートは、授業において「必ず提示する(言う)」ものとし、枝葉のモデルシートは「できたら提示する(言う)」、「時間があつたら提示する(言う)」と、段階的に扱う。

参考資料 2：調査回答（Web 画面イメージ）

○調査について



The image shows a Google Forms survey page. At the top, the browser address bar shows the URL: <https://docs.google.com/forms/d/16lgSkLLPQGikZFwuM9Buhu7eXR3RQTMQCL5eKcr-Tg/edit>. The form title is '算数・数学における「発展型授業」に関する調査'. Below the title, there are tabs for '質問' (Questions), '回答' (Responses) with a count of 601, and '設定' (Settings). A header image shows students in a classroom with their hands raised. The main content area contains the following text:

算数・数学における「発展型授業」に関する調査

平成29・30年告示学習指導要領の目標に「発展的に考察する力」が掲げられています。これを意識した授業実践が行われるよう、算数・数学を指導されている先生方の意識の実態を把握し、その知見をもとに提案していく考えを進めております。本調査の趣旨にご理解いただき、下記アンケートにご協力ください。

アンケートは、

- ・「1. あなたのこと」に関するものが7問（選択式、必須）
- ・「2. あなたの問題解決」に関するものが6問（選択式、必須）
- ・「3. あなたの指導」に関するものが7問（選択式、必須）
- ・「4. 質問紙調査への感想、意見」に関するものが1問（記述式、自由回答）

となっております。

なお、回答は2021年7月末までといたします。

メールアドレス *

有効なメールアドレス

このフォームではメールアドレスが収集されます。 [設定を変更](#)

○勤務校が所在する都道府県について

算数・数学における「発展型授業」に関する調査

質問 回答 601 設定

(1) 現在の勤務校が所在する都道府県

プルダウン

1. 北海道
2. 青森県
3. 岩手県

○現在の勤務（校種等）

算数・数学における「発展型授業」に関する調査

質問 回答 601 設定

(2) 現在の勤務（校種等）*

1. 小学校勤務
2. 中学校勤務
3. 高等学校勤務
4. 義務教育学校勤務

○教職経験年数

算数・数学における「発展型授業」に関する調査

質問 回答 601 設定

(3) 教職経験年数*

1. 1年未満
2. 1年以上5年未満
3. 5年以上10年未満

○問題の選択

算数・数学における「発展型授業」に関する調査

質問 回答 601 設定

2. 下記の例1~10のような問題や内容に関わって、あなたの問題解決について教えてください。(1)の回答において、小・中・高の教員等は、あなたが指導している学年の問題（以下、本問題）を選んでください。学生や院生、大学教員は、回答する上でイメージしやすい問題を選んでください。次に、(2)~(8)の回答では、本問題をあなたが解決することにおいて、あなたの考えに近いと思われる位置を選んでください。

<小1問題> $8+6$ の計算をしましょう。
 <小2問題> 8の段の九九をつくりましょう。
 <小3問題> 1組と2組の好きな遊び課への人数をグラフに表しましょう。
 <小4問題> L字型の四角の面積を、辺の長さを測って求めましょう。
 <小5問題> ひし形の面積を求めましょう。
 <小6問題> $3/5+1/3$ の計算をしましょう。
 <中1問題> マッチ棒を並べて横1列に正方形を5個つくるとき、マッチ棒は少なくとも何本必要ですか。
 <中2問題> $x+y=7$, $2x+7y=10$ の2直線の交点の座標を求めなさい。
 <中3問題> 連続する2つの偶数の積に1をたした数は、どのような数になりますか。
 <数I問題> 3点(-1, 0), (3, 0), (5, 6)を通る2次関数を求めよ。

(1) 問題の選択 *

1. 小1問題
 2. 小2問題

○授業構想時の回答 (a~f)

算数・数学における「発展型授業」に関する調査

質問 回答 601 設定

(2) 問題の解決 *

1 2 3 4 5

あなたは、本問題が解ける。教えることが分かる。 あなたは、本問題が解けない、解けても不安が残る。教えることがよく分からない。

(3) 解法の説明 *

1 2 3 4 5

あなたは、本問題の解法を具体的に、または論理的に説明できる。 あなたは、本問題の解法を具体的に、または論理的に説明できない。または、説明できるが、簡潔さ、明瞭さ、的確さに欠ける。

(4) 法則性の発見 *

参考資料3：調査全体の回答数（名）

都道府県	教員				学生	計	都道府県	教員				学生	計
	小	中	高	大				小	中	高	大		
北海道	5	7	0	1	1	14	滋賀県	3	3	5	1	1	13
青森県	15	0	0	1	0	16	京都府	2	2	2	2	1	9
岩手県	2	0	3	0	0	5	大阪府	32	3	0	1	3	39
宮城県	0	0	3	2	0	5	兵庫県	1	0	0	0	1	2
秋田県	124	71	35	1	51	282	奈良県	11	2	4	3	8	28
山形県	0	3	0	1	0	4	和歌山県	8	1	0	1	1	11
福島県	0	4	0	0	0	4	鳥取県	0	0	0	0	0	0
茨城県	2	2	0	2	0	6	島根県	0	0	0	0	0	0
栃木県	1	2	0	3	0	6	岡山県	4	2	0	3	7	16
群馬県	0	0	0	0	0	0	広島県	14	0	1	3	0	18
埼玉県	2	6	0	0	0	8	山口県	0	2	0	0	0	2
千葉県	0	3	4	1	0	8	徳島県	0	0	0	0	0	0
東京都	4	2	1	6	0	13	香川県	3	4	0	2	0	9
神奈川県	0	1	3	1	0	5	愛媛県	0	1	0	0	0	1
新潟県	5	3	0	1	0	9	高知県	2	0	0	1	0	3
富山県	0	0	0	0	0	0	福岡県	3	5	0	1	0	9
石川県	0	0	0	0	0	0	佐賀県	0	1	0	0	0	1
福井県	0	0	0	0	0	0	長崎県	0	3	0	1	0	4
山梨県	0	0	0	1	0	1	熊本県	0	2	0	1	0	3
長野県	0	5	0	0	0	5	大分県	0	0	0	0	0	0
岐阜県	1	0	0	0	0	1	宮崎県	0	0	0	0	0	0
静岡県	5	5	0	0	0	10	鹿児島県	0	0	0	0	0	0
愛知県	7	2	0	1	0	10	沖縄県	0	3	0	0	0	3
三重県	0	4	7	0	0	11	合計	256	154	68	42	74	594

*小：小学校教員，中：中学校教員，高：高校教員，大：大学教員，学：学生，院生

*義務教育学校教員（7名），中等教育学校教員（2名），教育委員会・教育センター等に勤務の者（18名），無職の者（6名）は，選択した問題の校種に割り振った。

参考資料 4 : 「a. 問題の解決」 の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	276	25	6	3	1	1.16	0.52	1.00
	下段 (%)	100.0	88.7	8.0	1.9	1.0	0.3			
校種等	小学校	132	113	14	3	2	0	1.20	0.54	1.00
		100.0	85.6	10.6	2.3	1.5	0.0			
	中学校	82	75	5	1	0	1	1.13	0.54	1.00
		100.0	91.5	6.1	1.2	0.0	1.2			
	高校	33	33	0	0	0	0	1.00	0.00	1.00
		100.0	100.0	0.0	0.0	0.0	0.0			
	学生	24	16	6	1	1	0	1.46	0.78	1.00
		100.0	66.7	25.0	4.2	4.2	0.0			
	大学	40	39	0	1	0	0	1.05	0.32	1.00
		100.0	97.5	0.0	2.5	0.0	0.0			

参考資料 5 : 「b. 解法の説明」 の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	247	44	16	2	2	1.29	0.65	1.00
	下段 (%)	100.0	79.4	14.1	5.1	0.6	0.6			
校種等	小学校	132	98	24	8	1	1	1.36	0.70	1.00
		100.0	74.2	18.2	6.1	0.8	0.8			
	中学校	82	69	10	2	0	1	1.22	0.61	1.00
		100.0	84.1	12.2	2.4	0.0	1.2			
	高校	33	33	0	0	0	0	1.00	0.00	1.00
		100.0	100.0	0.0	0.0	0.0	0.0			
	学生	24	8	10	5	1	0	1.96	0.86	2.00
		100.0	33.3	41.7	20.8	4.2	0.0			
	大学	40	39	0	1	0	0	1.05	0.32	1.00
		100.0	97.5	0.0	2.5	0.0	0.0			

参考資料 6 : 「c. 法則性の発見」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	220	60	23	6	2	1.42	0.77	1.00
	下段 (%)	100.0	70.7	19.3	7.4	1.9	0.6			
校種等	小学校	132	87	30	11	3	1	1.49	0.81	1.00
		100.0	65.9	22.7	8.3	2.3	0.8			
	中学校	82	62	18	0	1	1	1.30	0.66	1.00
		100.0	75.6	22.0	0.0	1.2	1.2			
	高校	33	25	5	2	1	0	1.36	0.74	1.00
		100.0	75.8	15.2	6.1	3.0	0.0			
	学生	24	8	5	10	1	0	2.17	0.96	2.00
		100.0	33.3	20.8	41.7	4.2	0.0			
	大学	40	38	2	0	0	0	1.05	0.22	1.00
		100.0	95.0	5.0	0.0	0.0	0.0			

参考資料 7 : 「d. 簡潔・明瞭・的確，一般化」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	199	84	21	5	2	1.48	0.75	1.00
	下段 (%)	100.0	64.0	27.0	6.8	1.6	0.6			
校種等	小学校	132	77	42	10	2	1	1.55	0.77	1.00
		100.0	58.3	31.8	7.6	1.5	0.8			
	中学校	82	58	20	3	0	1	1.37	0.68	1.00
		100.0	70.7	24.4	3.7	0.0	1.2			
	高校	33	18	12	2	1	0	1.58	0.75	1.00
		100.0	54.5	36.4	6.1	3.0	0.0			
	学生	24	10	6	6	2	0	2.00	1.02	2.00
		100.0	41.7	25.0	25.0	8.3	0.0			
	大学	40	36	4	0	0	0	1.10	0.30	1.00
		100.0	90.0	10.0	0.0	0.0	0.0			

参考資料 8 : 「e. 見方・考え方のよさ」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	191	87	26	7	0	1.51	0.74	1.00
	下段 (%)	100.0	61.4	28.0	8.4	2.3	0.0			
校種等	小学校	132	81	34	14	3	0	1.54	0.78	1.00
		100.0	61.4	25.8	10.6	2.3	0.0			
	中学校	82	51	24	6	1	0	1.48	0.69	1.00
		100.0	62.2	29.3	7.3	1.2	0.0			
	高校	33	20	11	1	1	0	1.48	0.71	1.00
		100.0	60.6	33.3	3.0	3.0	0.0			
	学生	24	2	15	5	2	0	2.29	0.75	2.00
		100.0	8.3	62.5	20.8	8.3	0.0			
	大学	40	37	3	0	0	0	1.08	0.27	1.00
		100.0	92.5	7.5	0.0	0.0	0.0			

参考資料 9 : 「f. 発展的考察」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	183	86	34	7	1	1.58	0.80	1.00
	下段 (%)	100.0	58.8	27.7	10.9	2.3	0.3			
校種等	小学校	132	69	41	19	3	0	1.67	0.81	1.00
		100.0	52.3	31.1	14.4	2.3	0.0			
	中学校	82	59	19	3	0	1	1.35	0.67	1.00
		100.0	72.0	23.2	3.7	0.0	1.2			
	高校	33	16	13	4	0	0	1.64	0.70	2.00
		100.0	48.5	39.4	12.1	0.0	0.0			
	学生	24	5	8	7	4	0	2.42	1.02	2.00
		100.0	20.8	33.3	29.2	16.7	0.0			
	大学	40	34	5	1	0	0	1.18	0.45	1.00
		100.0	85.0	12.5	2.5	0.0	0.0			

参考資料 10 : 「G. 問題の数値, 条件, 内容, 配列」の回答傾向【表 6 の再掲】

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	34	76	79	62	60	3.12	1.28	3.00
	下段 (%)	100.0	10.9	24.4	25.4	19.9	19.3			
校種等	小学校	132	12	34	33	27	26	3.16	1.27	3.00
		100.0	9.1	25.8	25.0	20.5	19.7			
	中学校	82	10	19	21	18	14	3.09	1.28	3.00
		100.0	12.2	23.2	25.6	22.0	17.1			
	高校	33	1	9	7	9	7	3.36	1.19	3.00
		100.0	3.0	27.3	21.2	27.3	21.2			
	学生	24	2	6	8	5	3	3.04	1.16	3.00
		100.0	8.3	25.0	33.3	20.8	12.5			
	大学	40	9	8	10	3	10	2.93	1.49	3.00
		100.0	22.5	20.0	25.0	7.5	25.0			

参考資料 11 : 「H. 想定と異なる学習者の解決」の回答傾向【表 7 の再掲】

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	193	81	25	10	2	1.54	0.83	1.00
	下段 (%)	100.0	62.1	26.0	8.0	3.2	0.6			
校種等	小学校	132	73	42	13	4	0	1.61	0.79	1.00
		100.0	55.3	31.8	9.8	3.0	0.0			
	中学校	82	59	19	4	0	0	1.33	0.57	1.00
		100.0	72.0	23.2	4.9	0.0	0.0			
	高校	33	22	6	2	3	0	1.58	0.97	1.00
		100.0	66.7	18.2	6.1	9.1	0.0			
	学生	24	5	10	5	2	2	2.42	1.18	2.00
		100.0	20.8	41.7	20.8	8.3	8.3			
	大学	40	34	4	1	1	0	1.23	0.62	1.00
		100.0	85.0	10.0	2.5	2.5	0.0			

参考資料 12 : 「I. 学習者の困難への対応」の回答傾向【表 8 の再掲】

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	38	85	109	64	15	2.78	1.06	3.00
	下段 (%)	100.0	12.2	27.3	35.0	20.6	4.8			
校種等	小学校	132	14	48	38	29	3	2.69	1.00	3.00
		100.0	10.6	36.4	28.8	22.0	2.3			
	中学校	82	10	19	35	15	3	2.78	1.01	3.00
		100.0	12.2	23.2	42.7	18.3	3.7			
	高校	33	2	6	11	10	4	3.24	1.09	3.00
		100.0	6.1	18.2	33.3	30.3	12.1			
	学生	24	1	8	8	5	2	2.96	1.04	3.00
		100.0	4.2	33.3	33.3	20.8	8.3			
	大学	40	11	4	17	5	3	2.63	1.23	3.00
		100.0	27.5	10.0	42.5	12.5	7.5			

参考資料 13 : 「J. 価値づけ」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	128	135	37	10	1	1.78	0.80	2.00
	下段 (%)	100.0	41.2	43.4	11.9	3.2	0.3			
校種等	小学校	132	51	60	15	6	0	1.82	0.81	2.00
		100.0	38.6	45.5	11.4	4.5	0.0			
	中学校	82	37	36	9	0	0	1.66	0.67	2.00
		100.0	45.1	43.9	11.0	0.0	0.0			
	高校	33	11	12	6	3	1	2.12	1.08	2.00
		100.0	33.3	36.4	18.2	9.1	3.0			
	学生	24	3	14	6	1	0	2.21	0.72	2.00
		100.0	12.5	58.3	25.0	4.2	0.0			
	大学	40	26	13	1	0	0	1.38	0.54	1.00
		100.0	65.0	32.5	2.5	0.0	0.0			

参考資料 14 : 「K. 多様な解決」の回答傾向【表 9 の再掲】

表 9 : 「K. 多様な解決」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	95	89	56	63	8	2.36	1.19	2.00
	下段 (%)	100.0	30.5	28.6	18.0	20.3	2.6			
校種等	小学校	132	34	40	23	33	2	2.46	1.17	2.00
		100.0	25.8	30.3	17.4	25.0	1.5			
	中学校	82	31	18	18	12	3	2.24	1.21	2.00
		100.0	37.8	22.0	22.0	14.6	3.7			
	高校	33	3	13	7	10	0	2.73	1.01	3.00
		100.0	9.1	39.4	21.2	30.3	0.0			
	学生	24	4	8	5	4	3	2.75	1.29	2.50
		100.0	16.7	33.3	20.8	16.7	12.5			
	大学	40	23	10	3	4	0	1.70	0.99	1.00
		100.0	57.5	25.0	7.5	10.0	0.0			

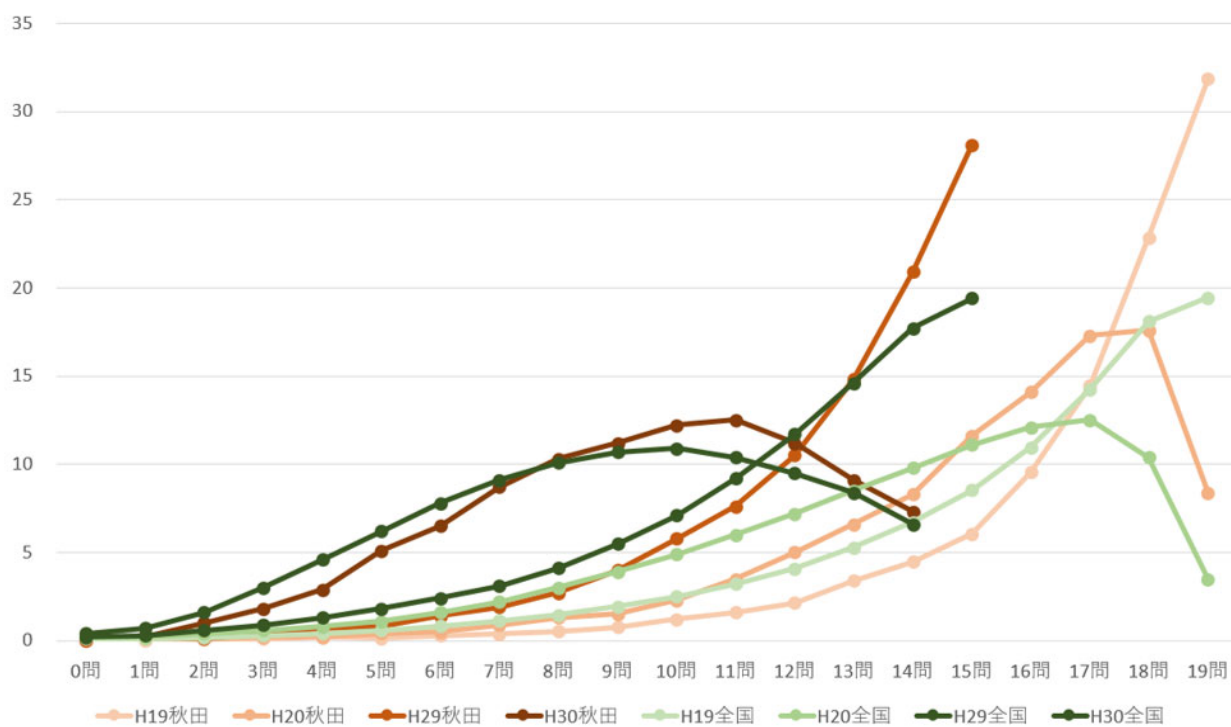
参考資料 15 : 「L. 発展 - 習熟」の回答傾向

		合計	回答傾向					平均値	標準偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	97	110	50	41	13	2.24	1.15	2.00
	下段 (%)	100.0	31.2	35.4	16.1	13.2	4.2			
校種等	小学校	132	32	47	21	22	10	2.48	1.24	2.00
		100.0	24.2	35.6	15.9	16.7	7.6			
	中学校	82	32	28	13	9	0	1.99	1.00	2.00
		100.0	39.0	34.1	15.9	11.0	0.0			
	高校	33	6	14	6	4	3	2.52	1.20	2.00
		100.0	18.2	42.4	18.2	12.1	9.1			
	学生	24	3	10	6	5	0	2.54	0.98	2.00
		100.0	12.5	41.7	25.0	20.8	0.0			
	大学	40	24	11	4	1	0	1.55	0.78	1.00
		100.0	60.0	27.5	10.0	2.5	0.0			

参考資料 16 : 「M. 支援の見通し」の回答傾向

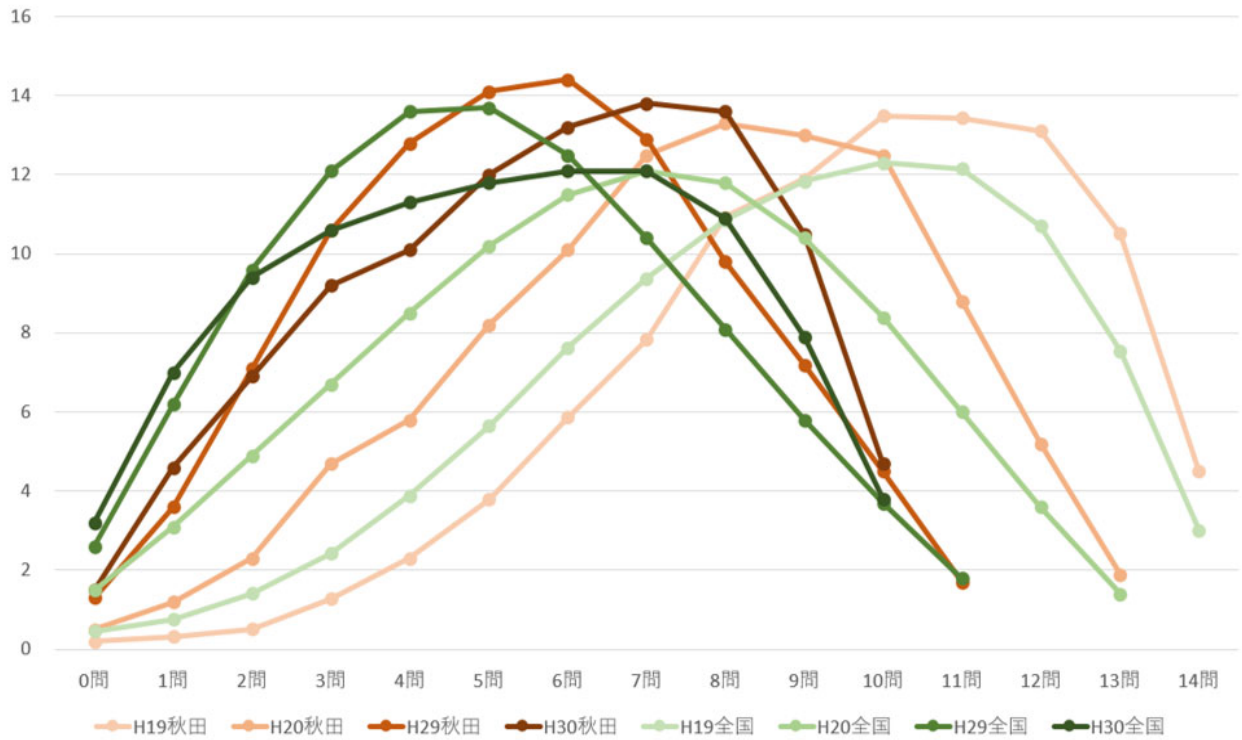
		合計	回答傾向					平均値	標準 偏差	中央値
			可謬的可變的よりな回答		絶対的固定的よりな回答					
			1	2	3	4	5			
全体	上段 (名)	311	98	152	43	16	2	1.95	0.85	2.00
	下段 (%)	100.0	31.5	48.9	13.8	5.1	0.6			
校種等	小学校	132	34	75	13	9	1	2.00	0.84	2.00
		100.0	25.8	56.8	9.8	6.8	0.8			
	中学校	82	28	37	16	1	0	1.88	0.76	2.00
		100.0	34.1	45.1	19.5	1.2	0.0			
	高校	33	8	17	7	1	0	2.03	0.77	2.00
		100.0	24.2	51.5	21.2	3.0	0.0			
	学生	24	2	12	4	5	1	2.63	1.06	2.00
		100.0	8.3	50.0	16.7	20.8	4.2			
	大学	40	26	11	3	0	0	1.43	0.64	1.00
		100.0	65.0	27.5	7.5	0.0	0.0			

参考資料 17：全国学力・学習状況調査の得点推移【小学校算数 A/H19, 20, 29, 30 比較】

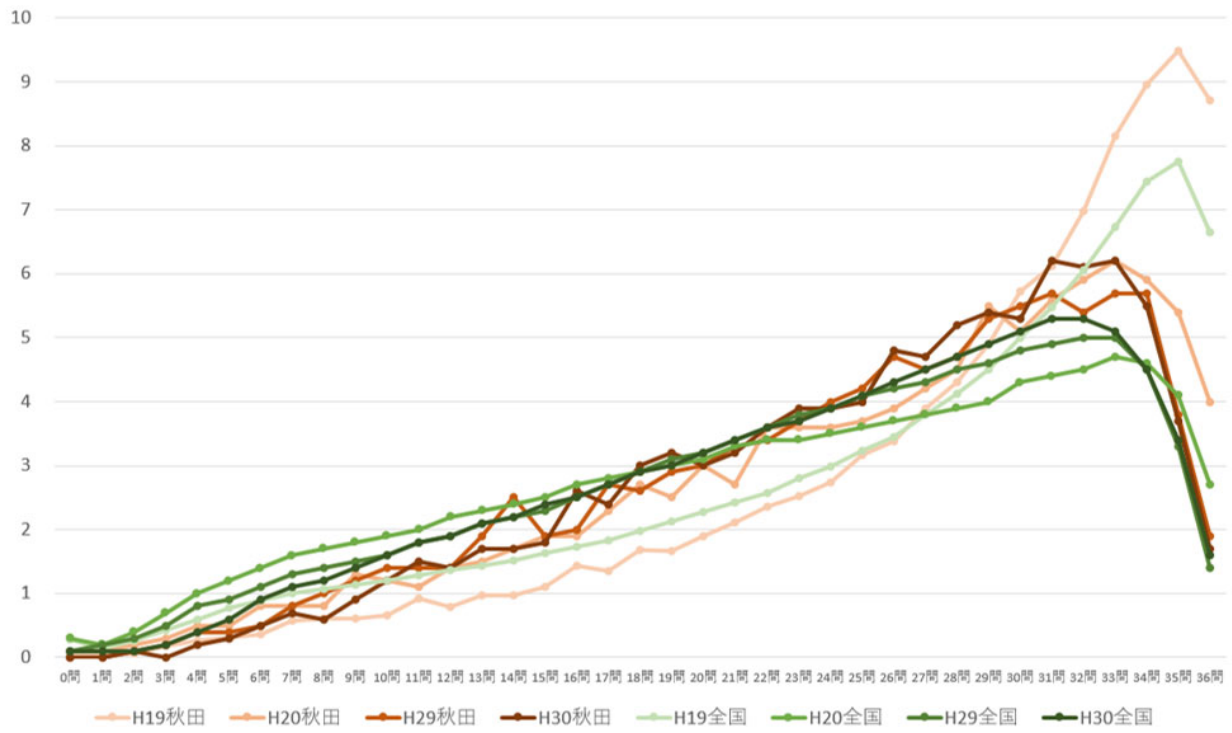


*平成 19 年度，平成 20 年度，平成 29 年度，平成 30 年度の「全国学力・学習状況調査報告書・調査結果資料（文部科学省・国立教育政策研究所）をもとに作成（参考資料 18, 19, 20 も同じ）.

参考資料 18：全国学力・学習状況調査の得点推移【小学校算数 B/H19, 20, 29, 30 比較】



参考資料 19：全国学力・学習状況調査の得点推移【中学校数学 A/H19, 20, 29, 30 比較】



参考資料 21：小4「イカ数問題」の問題例と一般的な展開

[原題] 1から9までの数が書かれたカードが1枚ずつあります。

1 2 3 4 5 6 7 8 9

この中から2枚のカードを選んで、次のような2けたのひき算の答えについて考えます。

ア カードの差が1の場合

$21-12=9$	$54-45=9$	$87-78=9$
$32-23=9$	$65-56=9$	$98-89=9$
$43-34=9$	$76-67=9$	

カードの差が1の場合に、2けたのひき算の答えが9になるわけを考えましょう。

条件変更

イ $31-13=18$ $41-14=27$	ウ $212-121=91$	エ $12+21=33$
$42-24=18$ $52-25=27$	$323-232=91$	$23+32=55$
$53-35=18$ $63-36=27$	$434-343=91$	$34+43=77$
⋮ ⋮	⋮	⋮
カードの差が他の場合	3けたのひき算の場合	2けたのたし算の場合

条件変更

このように順次指導しても、学習者が発展的に考えることにならない場合もある。

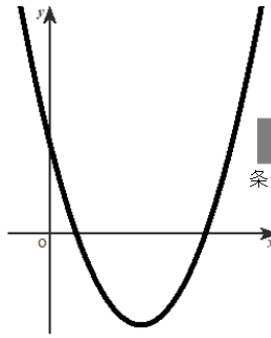
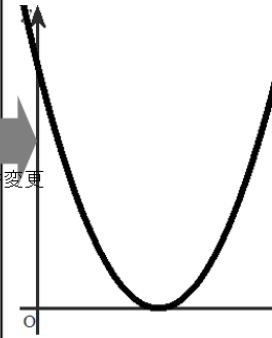
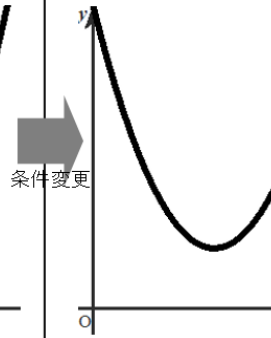
参考資料 22：小4「イカ数問題」における発展型授業の違い

		発展3状況教師の指導・支援		
		発見的発展	構造的発展	新たな発展
内容的発展 習得型授業	既知を発展した内容の習得は見られるが、新たな発展のない授業。	21-12=9, 32-23=9, ... のようにカードの差が1の場合を調べ、差が同じになることに問題意識を持たせる。	位取り表を使って、カードの差が同じになる理由を明らかにし、「カードの差×9」とまとめる。	別問題として、2桁を3桁にする問題等に取り組みませる。
指導的発展 型授業	教師主導で新たな発展が展開する授業。	21-12=9, 32-23=9, ... のようにカードの差が1の場合を調べ、差が同じになることに問題意識を持たせる。	位取り表を使って、カードの差が同じになる理由を明らかにし、「カードの差×9」とまとめる。	カードの差が異なる場合や、2桁を3桁にする問題等を提示し、取り組みさせる。どのようなことがいえるか、考えさせる。
自律的発展 型授業	学習者の意思が働いて発展3状況が展開している授業。	上記以外のカードの差にも問いをもつ学習者の反応を取り上げる。	位取り表を使って、カードの差が同じになる理由を明らかにし、「カードの差×9」とまとめる。	教師の想定外受容による差違 新たに取り組みたいことを尋ねたり、これまでに喚起された問いを取り上げ、どのようなことがいえるか、考えさせる。

参考資料 23：数学 I 「2 次関数のグラフと x 軸の位置関係」の問題例と一般的な展開

[原題]2次関数のグラフとx軸の共有点を求めよ.

↓ 条件変更

<p>ア 2次関数$y = x^2 - 4x + 2$のグラフとx軸の共有点の座標を求めよ.</p> 	<p>イ 2次関数$y = x^2 - 4x + 4$のグラフとx軸の共有点の座標を求めよ.</p> 	<p>ウ 2次関数$y = x^2 - 4x + 5$のグラフとx軸の共有点の座標を求めよ.</p> 
2次関数のグラフx軸と異なる2点で交わる場合	2次関数のグラフx軸と異なる2点で交わる場合	2次関数のグラフx軸と異なる2点で交わる場合

このように順次指導しても、学習者が発展的に考えることにならない場合もある.

参考資料 24：数学 I 「2 次関数のグラフと x 軸の位置関係」における発展型授業の違い

		発展3状況教師の指導・支援		
		発見的発展	構造的発展	新たな発展
内容的発展 習得型授業	既知を発展した内容の習得は見られるが、新たな発展のない授業.	2次方程式を解くことで、共有点の座標が求められることを指導する.	2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸との共有点の個数は、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と一致するとまとめる.	別問題として、放物線と直線の共有点の座標を求めさせる.
指導的発展 型授業	教師主導で新たな発展が展開する授業.	2次関数のグラフをかかせ、共有点が2個の場合、1個の場合、0個の場合があることに気付けさせる.	1次関数のグラフの交点が、連立方程式を解くことで求められたことに気付け、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸との共有点は、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と一致することに気付けさせる.	放物線と直線の共有点の座標は、どのように求められるかを考えさせる.
自律的発展 型授業	学習者の意思が働いて発展3状況が展開している授業.	2次関数のグラフをかかせ、共有点が2個の場合、1個の場合、0個の場合があることに気付けさせる.	1次関数のグラフの交点が、連立方程式を解くことで求められたことに気付け、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフとx軸との共有点は、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と一致することに気付けさせる.	<div style="text-align: center;">教師の想定外受容による差違</div> どんなことが分かったかを尋ねたり、新たに取り組むたい課題を考えさせたりし、学習者が既習の事柄を振り返ったり、新たな問いを生み出したりすることを促す.

引用・参考文献一覧

- アーネスト, P. (2015). 数学教育の哲学 (長崎栄三・重松敬一・瀬沼花子監訳). 東洋館出版社.
(原著出版 1991 年)
- 国立教育政策研究所教育課程センター (2018). 平成 24 年度小学校学習指導要領実施状況調査
教師質問紙調査結果 (算数). https://www.nier.go.jp/kaihatsu/shido_h24/01h24_25/03h24kyoushi_sansu.pdf (2022.2.22 参照)
- 国立教育政策研究所教育課程センター (2018). 平成 25 年度中学校学習指導要領実施状況調査
教師質問紙調査結果 (数学). https://www.nier.go.jp/kaihatsu/shido_h25/02h25/03h25kyoushi_suuugaku.pdf (2022.2.22 参照)
- 国立教育政策研究所教育課程センター (2019). 平成 27 年度高等学校学習指導要領実施状況調
査教師質問紙調査 (数学 I). https://www.nier.go.jp/kaihatsu/shido_h27/h27/09h27kyoushi_suuugaku.pdf (2022.2.22 参照)
- 文部科学省 (2017). 小学校学習指導要領 (平成 29 年告示). 東洋館出版社.
- 文部科学省 (2017). 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示). 日本文教出版.
- 文部科学省 (2018). 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示). 東山書房.
- 文部科学省 (2018). 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説数学編. 日本文教出版.
- 文部科学省 (2018). 小学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説算数編. 日本文教出版.
- 文部科学省 (2019). 高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説数学編理数編. 学校図書.
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2021). 令和 3 年度全国学力・学習状況調査報告書質問紙調
査. 文部科学省・国立教育政策研究所.
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2007). 平成 19 年度全国学力・学習状況調査報告書・調査
結果資料. <https://www.nier.go.jp/tyousakekka/tyousakekka.htm>
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2008). 平成 20 年度全国学力・学習状況調査報告書・調査
結果資料. <https://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukou/index.htm>
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2017). 平成 29 年度全国学力・学習状況調査報告書・調査
結果資料. <https://www.nier.go.jp/17chousakekkahoukou/index.html>
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2018). 平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書・調査
結果資料. <https://www.nier.go.jp/18chousakekkahoukou/index.html>
- 佐藤学 (2020). 授業改善「モデルプレート」, 数学教育, 61(7), 28-31. 明治図書.
- 佐藤学 (2021). 算数・数学における「自律的発展型授業」に関する質問紙調査の実施とその分
析: 秋田県小中高教員データから校種間の相違の分析. 全国数学教育学会第 55 回研究発表
会発表資料. <http://www.gipc.akita-u.ac.jp/~mathedu/report1.html> (2022.2.15 参照)
- 中島健三 (1982). 算数・数学教育と数学的な考え方. 金子書房.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子 (2017). 学習者が発展的に考える
ことを支援するモデルプレートの開発とその検証. 数学教育学論究, 99, 臨時増刊, 9-16.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子・黒田大樹 (2018). 学習者の発展
的な思考・態度を促す段階的授業モデルの開発—教師の意識変容の長期的事例分析を通し
て—, 日本数学教育学会第 51 回秋期研究大会, 発表資料. <http://www.gipc.akita-u.ac.jp/~mathedu/img/file51.pdf>

- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・城田直彦・黒田大樹（2019）.「発展的思考・態度の育成における授業評価モデルの検討ー観点「教材を知る」の基準の検討ー」,第 52 回秋期研究大会発表集録, 217-220.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・新木伸次・城田直彦・黒田大樹・川崎正盛（2020）. 発展型授業の分析での集団思考を把握する基準の検討. 第 53 回秋期研究大会発表集録, 185-188.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・新木伸次・城田直彦・黒田大樹（2020）. 発展的思考・態度の育成を指向した授業評価ルーブリックの検討ー観点「子供の反応を知る」の基準ー. 東北数学教育学会誌, 51, 51-61. https://doi.org/10.34568/tsme.0.51_51
- 佐藤学・重松敬一・新木伸次・城田直彦・黒田大樹（2021）. 発展型授業の分析における観点「授業展開を知る」基準の検討. 東北数学教育学会誌, 52, 40-51. https://doi.org/10.34568/tsme.0.52_40
- 佐藤学・重松敬一・加藤久恵・新木伸次・椎名美穂子・黒田大樹（2022）. 発展的思考・態度における「数学することを知る」の枠組みの開発と検証. 東北数学教育学会誌, 53, 25-40. https://doi.org/10.34568/tsme.0.53_25
- 沢田利夫・橋本吉彦・坪田耕三・中野洋二郎・戸原辰一（1980）. 算数の問題の発展的な扱いによる指導法について. 日本数学教育学会誌, 62(10), 8-14. https://doi.org/10.32296/jjsme.62.10_8
- 重松敬一・勝美芳雄・上田喜彦・高井吾朗・高澤茂樹（2013）.『算数の授業で「メタ認知」を育てよう』, 日本文教出版.
- 椎名美穂子（2019）.「問題解決停滞におけるメタ認知的支援に関する研究」,『東北数学教育学会誌』, 50, 44-51.

本調査に関する発表等一覧

- 佐藤学・重松敬一・加藤久恵・新木伸次・黒田大樹 (2021). 発展型授業分析における「数学することを覚る」の枠組みの開発とその試行. 東北数学教育学会, 第 26 回初夏研究会, 2021 年 5 月 29 日.
- 佐藤学・重松敬一・新木伸次・黒田大樹 (2021). 教師の「数学をすることを覚る」を捉える枠組みの開発. 日本数学教育学会, 第 9 回春期研究大会, 2021 年 6 月 6 日.
- 佐藤学 (2021). 算数・数学における「発展型授業」に関する調査の実施とその分析: 一ヶ月時中間報告. あきた数学教育学会, 第 4 回定例研究会, 2021 年 8 月 14 日.
- 佐藤学 (2021). 算数・数学における「自律的発展型授業」に関する質問紙調査の実施とその分析: 秋田県小中高教員データの分析. 東北数学教育学会, 第 53 回年会, 2021 年 11 月 27 日.
- 佐藤学 (2021). 算数・数学における「自律的発展型授業」に関する質問紙調査の実施とその分析: 秋田県小中高教員データから校種間の相違の分析. 全国数学教育学会, 第 55 回研究発表会, 2021 年 12 月 11 日.
- 佐藤学・重松敬一・加藤久恵・新木伸次・椎名美穂子・黒田大樹 (2022). 発展的思考・態度における「数学することを覚る」の枠組みの開発と検証. 東北数学教育学会誌, 53, 2022 年 3 月 31 日.

本研究に関する公開サイト

<http://www.gipc.akita-u.ac.jp/~mathedu/report1.html>
(2022 年 6 月 1 日最終確認)

謝辞

本発表の研究は, JSPS 科研費 JP17K04525, 18K02518 の助成を受けたものです.