

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルの開発と活用法の提案

皇學館中学・高等学校

黒田 大樹

奈良教育大学名誉教授

重松 敬一

秋田大学

佐藤 学

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルの開発に至った経緯

- ★ 高等学校では、数学的活動に重点をおいた指導が十分に行われていない
- ★ 焦点化した問題から結果を導く過程のみを重視



**数学的活動を取り入れた授業を構成するノウハウが十分でない**

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルの開発に至った経緯

これまでの研究では・・・

- ★ 学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発
- ★ 発展的思考・態度を促す授業モデルの開発



- ★ **学習者が数学的活動を遂行するには、発展的思考・態度の育成が鍵**
- ★ **発展的思考・態度による活動をもとに、数学的活動の授業構成を提案**

# 学習者が数学的活動を遂行するための授業構成モデルに基づいて、数学Ⅱ「指数関数・対数関数」の教材例を作成すると...

<p>数学の事象 日常生活や社会の事象</p>	<p>[問1] 井戸水に含まれる有害物質にはどのようなものがあるか調べてみよう。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>井戸水に含まれる有害物質 F は... 調べてみる。</li> </ul> <p>[問2] 井戸水に含まれる... あるだろうか。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>井戸水に含まれる...</li> <li>井戸水に含まれる...</li> </ul>	<p>学習者の状況に応じて、以下のような発見的発展を促す発問を行う。</p> <p>発見的発展を促す発問</p> <p>[分析] a2. 何(何と何)...</p> <p>b1. 何か... b2. 調べてみたいことがある? b3. 考えてみたいことがある? b4. 今までとどこが違う? h1. 面白い考えだね。 h2. やってみようか。</p>
<p>数学的に表現した問題</p>	<p>[問3] 装置 A は 1 回ろ過するたびに有害物質... 繰り返し、井戸水に含まれる有害物質... ろ過すればよいか。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>井戸水に含まれる...</li> <li>n 回除去し...</li> </ul>	<p>学習者の状況に応じて、以下のような構造的発展を促す発問を行う。</p> <p>構造的発展を促す発問</p> <p>モデルプレート</p> <p>→【解決】</p> <p>e1. 何か分かった? e2. 何から分かった? e3. 前の学習と似ているところはある?</p>
<p>焦点化した問題</p>	<p><math>(\frac{9}{10})^n \leq \frac{1}{10}</math> を... とする。</p> <p>1 と変形できる。 <math>\cdot 9^n = 3^{2n}</math> とし、両辺の常用対数をとる。</p> <p>て、n に関する 1 次不等式を導く。</p> <p>最小の自然数</p>	<p>学習者自身に発問して発見的発展を促す発問を行う。</p> <p>→【統合】</p> <p>d1. 同じところはある? d2. 他にあるか?</p> <p>【表現】</p> <p>e1. 簡単に分かりやすく表すと? e2. 数学らしく表すと?</p> <p>【一般化】</p> <p>f1. いっ...</p>
<p>新たな数学の事象 新たな日常生活や社会の事象</p>	<p>[問4] この問題を解決するにあたって考えたことや、さらに考えたことや調べてみたい... ことについてまとめよう。</p> <p>(例) 1 回ろ過するたびに除去性能が落ちるかもしれない。1 回ごとの除去性能の変化を調べる。</p>	<p>学習者の状況に応じて、以下のような新たな発展を促す発問を行う。</p> <p>新たな発展を促す発問</p> <p>→【発展】 g1. この後どんなことができるのか。(幹) g2. 数量を変えてみると? g3. 条件を変えてみると? g4. 場面を変えてみると? g5. 視点を変えてみると?</p> <p>学習者自身が新たな課題を見いだすことができるよう支援する。</p>

数学的活動を生み出すために  
必要な場面を設定する

- 学習者はどのようなことに興味をもつのか

数学的活動を取り入れた  
授業を想起する

- 教師が必要な発問は何か

数学的活動を生み出すために  
必要なことを整理する

- 学習者はどのようなことが得意なのか
- 学習者はどのようなことが苦手なのか

与えられた問題から数学的活動を  
生み出すことを考える

- この問題が解ければ、どのような事象の解決に役立つのか
- 学習者はどのようなことを学んできたのか

学習者の支援を  
検討する

- 学習者にどのような支援が必要なのか

数学的活動を取り入れた  
授業を構成する

- 学習者が数学的活動過程を遂行できるか

授業場面を想起しながら、

学習者の支援を考える

# 例 指数不等式・対数不等式の学習指導での数学的活動

【問1】  
井戸水に  
どのよう

- ・井戸水に含まれる有害物質Fについて調べる。
- ・井戸水に含まれる有害物質Fの量を調べる。
- ・井戸水に含まれる有害物質Fを除去する装置Aの除去性能を調べる。

る有害物質Fを除去し、  
こは、どのような方法が

【問3】

装置Aは1回ろ過するたびに有害物質Fを10%除去できる。この装置でろ過を繰り返し、井戸水に含まれる有害物質Fを当初の10%以下にするには、最低何回ろ過すればよいか。

数学的に表現した  
問題

数学化

井戸水にはじめ含まれる有害物質Fの量を  $x$  とし、ろ過する回数を  $n$  とすると  $n$  回除去した後の有害物質Fの量は  $(\frac{9}{10})^n \times x$  で表すことができる。

$(\frac{9}{10})^n \leq \frac{1}{10}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求める。  
ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。

焦点化した  
問題

22 回ろ過すればよい。

- ・  $9^n \leq 10^{n-1}$  と変形する。
- ・  $9^n = 3^{2n}$  とし、両辺の常用対数をとる。
- ・  $\log_{10} 3 = 0.4771$  を用いて、 $n$  に関する1次不等式を導く。
- ・  $n$  の値が不等式を満たす最小の自然数であることを注意する。

活用・意味づけ

結果

【問4】

この問題を解決するにあたって考えたことや、さらに考えたことや調べてみたいことについてまとめよう。

この問題を解決するために考えたことや、さらに考えたことや調べてみたいことについてまとめよう。

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルの特徴

## 焦点化した問題から遡って・・・

★〈Step1〉 焦点化した問題から数学的に表現した問題へ

★〈Step2〉 数学的に表現した問題から、日常生活や社会の事象・数学の事象へ



**背景を振り返りながら、数学的活動の全体像を見通した授業構成**

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルの特徴

**日常生活や社会の事象・数学の事象に遡った後は・・・**

〈Step3〉

- ★ モデルプレートを参照し、教師の発問を検討
- ★ 気付きや新たな問いを生み出す課題を設定
- ★ 肯定的なメタ認知的知識を育成するための評価
- ★ 自律的活動を促すための教師の支援に対する意識

# 研究の背景

## 新学習指導要領が重視していること・・・

- ★ 数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して学習を展開すること
- ★ 統合的・発展的に考えること



**発展的思考・態度を育成し、  
学習者が数学的活動を遂行する授業の展開が重要**

# 現状の課題

平成27年度高等学校学習指導要領実施状況調査では・・・

教師質問紙調査において、

課題学習に関わる指導について、肯定的な回答をした割合が低い



**数学的活動に重点を置いた指導が十分に行われていない**

# 研究の目的

## 本研究では・・・

学習者が数学的活動を遂行するための授業構成モデルを開発し、  
本モデルに基づき、授業計画の作成方法の提案を行う

# 先行研究の考察

佐藤他 (2017)

佐藤他 (2018)

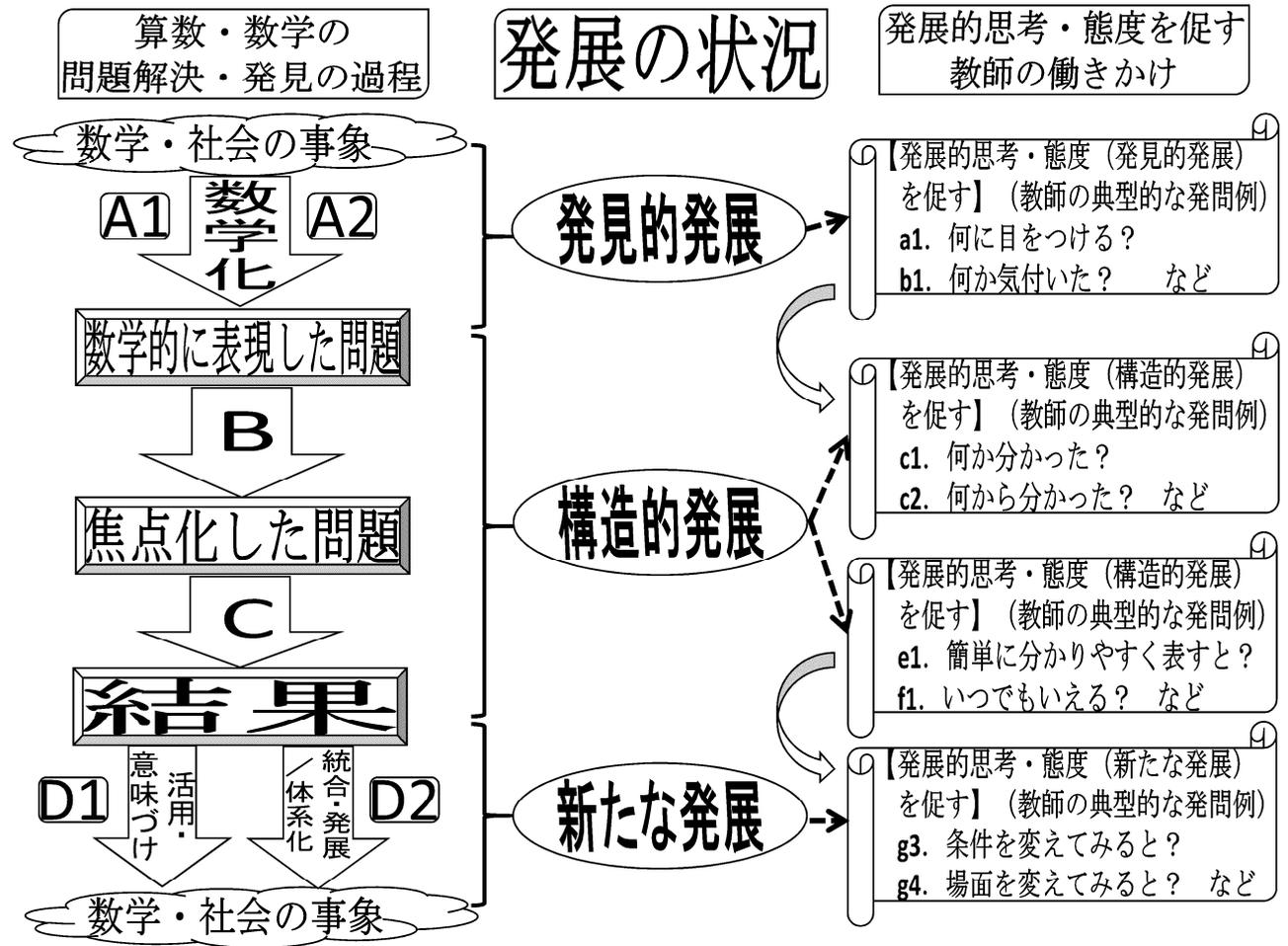
学習者が発展的に考えることを  
支援するモデルプレート

発展の状況	具体的な数学的活動の局面	学習者の心理	モデルプレート(学習者の範)		
			必ず言う	できたら言う	時間があつたら言う
発見的発展	a. 数量や図形及びそれらの関係に着目する(問題解決の対象化)	気付き			a1. 何に目をつける?(幹)
	b. 着目した数量や図形及びそれらの関係について分析する	気付き	知		a2. 何(何と何)を調べる?
	h. 数量や図形及びそれらの関係について無意図的に着目・分析する。	気付き	興		b1. 何か気付いた?(幹)
構造的発展	c. 発見的発展の過程を振り返って数学的構造を明らかにする。	困難 確信	奮		b2. 調べてみたいことがある?
	d. 既知を振り返って統合する。				b3. 考えてみたいことがある?
	e. 簡潔・明瞭・的確に表す。				b4. 今までとどこが違う?
	f. 一般化する。				h1. 面白い考えだね。 h2. やってみようか。
新たな発展	g. 明らかにした数学的構造と既知や身の回りの問題を振り返って、さらに発展的に考える。	気付き			c1. 何か分かった? c2. 何から分かった?
				c3. 前の学習と似ているところはある?	
				d1. 同じところはある?	
				d2. 他にあるか?	
				e1. 簡単に分かりやすく表すと? e2. 算数(または数学)らしく表すと? f1. いつでもいえる?	
	g1. この後どんなことができるのか。(幹)				
		g2. 数量を変えてみると?			
		g3. 条件を変えてみると?			
		g4. 場面を変えてみると?			
		g5. 視点を変えてみると?			

# 先行研究の考察

黒田 (2020)

発展的思考・態度を  
促す授業モデル



# 先行研究の考察

先行研究を俯瞰すると・・・

**学習者が数学的活動を遂行するにあたり、  
発展的思考・態度の育成が鍵**

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルの開発に向けて

## 開発にあたって・・・

- ★ 高等学校数学科の指導は、授業では問題の解法の説明が中心
- ★ 中・長期的な視野から数学的活動を規定し、  
その実現可能性や妥当性を実践的に検討することが重要



**焦点化した問題から結果を導く過程のみの指導からの脱却が必要**

状況	発展の	数学的活動の局面	教師の指導		授業構成の 順序やポイント	学習者の活動の具体例	
			発展的思考・態度を促す発問(モデルプレート)	必ず言う   できたら言う   時間があつたら言う			
数学の事象・日常生活や社会の事象					③ 場面設定		
発展 見 的	【着目】	a1. 何に目をつける?(幹)	a2. 何(何と何)を調べる?				
		【分析】	b1. 何か気付いた?(幹)	b2. 調べてみたいことがある?			
			b3. 考えてみたいことがある?	b4. 今までとどこが違う?			
【着目】【分析】	h1. 面白い考えだね。	h2. やってみようか。					
	数学的に表現した問題						② 課題の整理
発展 構 造的	【解決】	c1. 何か分かった?		整理			
		c2. 何から分かった?					
焦点化した問題			c3. 前の学習と似ているところはある?		① 学びの振り返り	反省・振り返り	
発展 構 造的	【統合】	d1. 同じところはある?		実践化			
		d2. 他にあるか?					
		【表現】	e1. 簡単に分かりやすく表すと?				
【一般化】	e2. 算数(または数学)らしく表すと?						
	結 果					⑤ 授業場面の想起	
発展 新 た な	【発展】	g1. この後どんなことができるのか?(幹)					
		g2. 数量を変えてみると?					
		g3. 条件を変えてみると?					
		g4. 場面を変えてみると?					
		g5. 視点を変えてみると?					
新たな数学の事象・新たな日常生活や社会の事象					⑥ 学習者の支援		

学習者が数学的活動を遂行するための授業構成モデルに基づいて作成した教材例

数学		学習者が数学的活動を遂行するための授業構成モデル		成の順序やポイント	
数学の事象 日常生活や社会の事象					
発見的発展	【着目】	気付き	a1. 何に目をつける？（幹）	③ 学習者の関心を引き出す事象や場面の設定	④ モデルプレート参照しながら発展的思考・態度の育成を意識した発問を想起し、具体例を記入
	【分析】		a2. 何（何と何）を調べる？		
	【着目】・【分析】		b1. 何か気付いた？（幹）		
数学的に表現した問題					
構造的発展	【解決】	気付き	c1. 何か分かった？	② 問題の背景を整理	① 問題の背景やこれまでの学習を振り返る
			c2. 何から分かった？		
			c3. 前の学習と似ているところはある？		
焦点化した問題					
構造的発展	【統合】	確信	d1. 同じところはある？	⑤ 数学的活動過程に沿って、学習者の知的興奮を促し、新たな問いが発生するような説明・指示・評価・発問を想起しながら、課題や小問を設定する	⑥ 肯定的なメタ認知的知識が育成される評価を与え、「積極的指導」→「消極的指導」→「自律的活動」となる授業展開を意識
	【表現】		d2. 他にあるか？		
	【一般化】		e1. 簡単に分かりやすく表すと？ e2. 算数・数学らしく表すと？ f1. いつでもいえる？		
結果					
新たな発展	【発展】	新たな問いの発生	g1. この後どんなことができるのか。（幹）		
			g2. 数量を変えてみると？		
			g3. 条件を変えてみると？		
			g4. 場面を変えてみると？		
			g5. 視点を変えてみると？		
新たな数学の事象 新たな日常生活や社会の事象					

学習者が数学的活動を遂行するための授業構成モデルに基づいて作成した教材例

- 井戸水に含まれる有害物質 F の量を調べる。
- 有害物質 F の量がどのようになれば飲水可能になるか調べる。
- 装置 A の有害物質 F の除去性能を調べる。
- 井戸水に含まれる有害物質 F を当初の 10% 以下にすればよい。
- 装置 A は、1 回ろ過するたびに有害物質 F を 10% 除去できる。

装置 A は 1 回ろ過するたびに有害物質 F を 10% 除去できる。この装置でろ過を繰り返し、井戸水に含まれる有害物質 F を当初の 10% 以下にするには、最低何回ろ過すればよいか。

井戸水にはじめ含まれる有害物質 F の量を  $x$  とし、ろ過する回数を  $n$  とすると、 $n$  回除去した後の有害物質 F の量は  $(\frac{9}{10})^n \times x$  で表すことができる。

よって、不等式  $(\frac{9}{10})^n \times x \leq \frac{1}{10} \times x$  を解けばよい。

$(\frac{9}{10})^n \leq \frac{1}{10}$  を満たす最小の自然数  $n$  を求める。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする。

- $9^n \leq 10^{n-1}$  と変形する。
- $9^n = 3^{2n}$  とし、両辺の常用対数をとる。
- $\log_{10} 3 = 0.4771$  を用いて、 $n$  に関する 1 次不等式を導く。
- $n$  の値が不等式を満たす最小の自然数であることを注意する。

22 回ろ過すればよい。

(例) 1 回ろ過するたびに除去性能が落ちるかもしれない。1 回ごとの除去性能の変化を調べる。

数学的活動の局面	学習者の活動	発展的思考・態度を促す発問と学習者への支援
<p>数学の事象 日常生活や社会の事象</p>	<p>[問1] 井戸水に含まれる有害物質にはどのようなものがあるか調べてみよう。</p> <p>・井戸水に含まれる有害物質 F は調べて調べる。</p> <p>[問2] 井戸水に含まれる有害物質はどのくらいあるだろうか。</p> <p>・井戸水に含まれる有害物質 F は調べて調べる。 ・井戸水に含まれる有害物質 G は調べて調べる。</p>	<p>学習者の状況に応じて、以下のような発見的発展を促す発問を行う。 発見的発展を促す発問</p> <p>[分析] a1. 何か分かった？ a2. 何（何と何）から分かった？ b1. 何か分かった？ b2. 調べてみたいことがある？ b3. 考えてみたいことがある？ b4. 今までとどこが違う？ h1. 面白い考えだね。 h2. やってみようか。</p>
<p>数学的に表現した問題</p>	<p>[問3] 装置 A は 1 回ろ過するたびに有害物質の量が <math>\frac{1}{10}</math> 減る。井戸水に含まれる有害物質の量を <math>n</math> 回ろ過すればよいか。</p> <p>・井戸水に含まれる有害物質の量を <math>n</math> 回ろ過すると、<math>\left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{1}{10}</math> を満たす最小の自然数 <math>n</math> を求めよ。</p>	<p>学習者の状況に応じて、以下のような構造的発展を促す発問を行う。 構造的発展を促す発問</p> <p>モデルプレートを参照し、</p> <p>→【解決】 c1. 何か分かった？ c2. 何から分かった？ c3. 前の学習と似ているところはある？</p> <p>学習者自身が導き出した問題解決の過程を振り返りながら、</p>
<p>焦点化した問題</p>	<p>与えられた問題から数学的活動を生み出すことを考える</p> <p>・この問題が解ければ、どのような事象の解決に役立つのか ・学習者はどのようなことを学んできたのか</p>	<p>→【統合】 d1. 同じところはある？ d2. 他にあるか？</p> <p>【表現】 e1. 簡単に分かりやすく表すと？ e2. 数学らしく表すと？</p> <p>【一般化】 f1. いっしょに考えてみるか？</p> <p>学習者の状況に応じて、以下のような新たな発展を促す発問を行う。 新たな発展を促す発問</p>
<p>新たな数学の事象 新たな日常生活や社会の事象</p>	<p>[問4] この問題を解決するにあたって考えたことや、さらに考えたことや調べてみたいことについてまとめよう。</p> <p>(例) 1 回ろ過するたびに除去性能が落ちるかもしれない。1 回ごとの除去性能の変化を調べる。</p>	<p>→【発展】 g1. この後どんなことができるのか。(幹) g2. 数量を変えてみると？ g3. 条件を変えてみると？ g4. 場面を変えてみると？ g5. 視点を変えてみると？</p> <p>学習者自身が新たな課題を見いだすことができるよう支援する。</p>

数学的活動を生み出すために必要な場面を設定する  
・学習者はどのようなことに興味をもつのか

数学的活動を取り入れた授業を想起する  
・教師が必要な発問は何か

数学的活動を生み出すために必要なことを整理する  
・学習者はどのようなことが得意なのか  
・学習者はどのようなことが苦手なのか

与えられた問題から数学的活動を生み出すことを考える  
・この問題が解ければ、どのような事象の解決に役立つのか  
・学習者はどのようなことを学んできたのか

学習者の支援を検討する  
・学習者にどのような支援が必要なのか

数学的活動を取り入れた授業を構成する  
・学習者が数学的活動過程を遂行できるか

モデルプレートを参照し、

授業場面を想起しながら、

学習者の支援を考える

# 学習者が数学的活動を遂行するための 授業構成モデルに期待される効果

学習者が数学的活動を遂行するための授業構成モデルを用いることで…

- ★ 問題の背景を振り返ることが可能
- ★ 学習者の関心を引き出すための場面設定を行うことが可能
- ★ 発展的思考・態度を育成することが可能
- ★ 学習者が数学的活動を遂行するための授業を展開することが可能

数学的活動に重点を置いた指導が行われることが期待できる

# 本研究の成果

- ★ 日常生活や社会の事象・数学の事象から始める教材を作成できること
- ★ 学習者の興味・関心をもつ場面としてさらによい素材はないか、  
考えをもつことができること
- ★ 教師自身が自然現象や社会現象を数理的に考察する力が要求されること

# 今後の課題

- ★ 教材例に基づいて実際に授業を行い、その有効性を検証すること
- ★ 学習者が数学的活動過程を遂行するための授業構成モデルの改善

# 謝辞

本研究は、JSPS科研費18K02518の助成を受けたものである。

また、科研費発展研究会の研究分担者・研究協力者の先生方には、

本研究に対し、多くのご意見やご指導をいただきました。

ここに改めてお礼申し上げます。

# 引用・参考文献

- ★ 国立教育政策研究所教育課程研究センター（2019）．平成27年度高等学校学習指導要領実施状況調査教師質問紙調査（数学Ⅰ）．  
[https://www.nier.go.jp/kaihatsu/shido\\_h27/h27/09h27kyoushi\\_suugaku.pdf](https://www.nier.go.jp/kaihatsu/shido_h27/h27/09h27kyoushi_suugaku.pdf)
- ★ 黒田大樹（2020）．発展的思考・態度を促す授業モデルの開発．日本数学教育学会誌，102(5)，17-24．
- ★ 黒田大樹・重松敬一・佐藤学（2020）．数学的活動過程を遂行するための授業構成モデルの開発．第8回春期研究大会論文集，380．
- ★ 溝口達也（2015）．カリキュラム開発における数学的活動とそのネットワークの方法論的考察．第3回春期研究大会論文集，57-62．
- ★ 文部科学省（2019）．高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説数学編理数編．学校図書．
- ★ 長尾篤志（2011）．高等学校における数学教育の意義．高等学校数学教育研究会編．高等学校数学教育の展開．聖文新社．
- ★ 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子（2017）．学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発とその検証．  
日本数学教育学会誌，99，数学教育学論究，臨時増刊，9-16．
- ★ 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木伸次・椎名美穂子（2018）．数学教育における教材研究と授業改善の研究VI—モデルプレートを活用した授業改善の試み—．  
秋田大学教育文化学部研究紀要教育科学，73，27-32．
- ★ 佐藤学・重松敬一・赤井利行・新木伸次・城田直彦・黒田大樹（2020）．発展的思考・態度の育成を指向した授業評価ルーブリックの検討：観点「子供の反応を知る」の基準．  
東北数学教育学会誌，51，51-61．
- ★ 真野祐輔・溝口達也・熊倉啓之・大滝孝治（2019）．数学的活動に基づく学習指導の設計．岩崎秀樹・溝口達也編著，新しい数学教育の理論と実践（p.71）．ミネルヴァ書房．