

発展的思考の関連図を活用した 授業づくりの試行 —中学校第1学年「比例」の場合—

佐藤 学

秋田大学

重松 敬一

奈良教育大学名誉教授

赤井 利行

大阪総合保育大学

杜 威

秋田大学

新木 伸次

国士舘大学

椎名 美穂子

秋田県総合教育センター

東北数学教育学会 第49回年会

平成29年11月25日(土)13:30~14:00 岩手大学学生センターB棟

科研費
KAKENHI

index

1. 研究の経緯と目的

2. 発展的に考えること

3. 発展的思考の関連図の開発

4. 関連図を活用した授業づくり

5. 考察と改善

2/32



1. 研究の目的と経緯

研究の目的と経緯

全ての学習者が発展的に考える算数・数学の授業の構築

- 2016年
- 教師対象の意識調査の実施と分析。
→授業の構築に向けて障壁となっている教師の意識を明らかにした。(佐藤他, 2016)
- 2017年
- 発展的に考えることの定義。
→「発見的発展」「構造的発展」「新たな発展」に整理。(佐藤他, 2017a)
 - 発展的に考える授業のモデルを開発。
→iQed法をもとに開発した。(佐藤他, 2017b)
 - 学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発。
→モデルプレートが機能することを明らかにした。(佐藤他, 2017c)
 - モデルプレートによる授業改善
→モデルプレートが授業改善を図る機能を有していることを明らかにした。(佐藤他, 2018)

4/32

学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレート			
発展の状況	具体的な数学的活動の局面	学習者の心理	モデルプレート(学習者の範)
			必ず言う できたら言う 時間があつたら言う
発見的発展	a. 数量や図形及びそれらの関係に着目する(問題解決の対象化)	気付き	a1. 何に目をつける?(幹) a2. 何(何と何)を調べる?
	b. 着目した数量や図形及びそれらの関係について分析する	気付き	b1. 何か気付いた?(幹) b2. 調べてみたいことがある? b3. 考えてみたいことがある? b4. 今までとどこが違う? h1. 面白い考えだね。 h2. やってみようか。
	h. 数量や図形及びそれらの関係について無意図的に着目・分析する。	気付き	h1. 面白い考えだね。 h2. やってみようか。 c1. 何か分かった? c2. 何から分かった?
構造的発展	c. 発見的発展の過程を振り返って数学的構造を明らかにする。	困難 確信	c3. 前の学習と似ているところはある? d1. 同じところはある? d2. 他にあるか? e1. 簡単に分かりやすく表すと? e2. 算数(または数学)らしく表すと? f1. いつでもいえる?
	d. 既知を振り返って統合する。		
	e. 簡潔・明瞭・的確に表す。		
	f. 一般化する。		
新たな発展	g. 明らかにした数学的構造と既知や身の回りの問題を振り返って、さらに発展的に考える。	気付き	g1. この後どんなことができるのか。(幹) g2. 数量を変えてみると? g3. 条件を変えてみると? g4. 場面を変えてみると? g5. 視点を変えてみると?

(佐藤他, 2017cを加筆) 5/32

これまでの研究からの知見と本発表の目的

<これまでの研究からの知見>

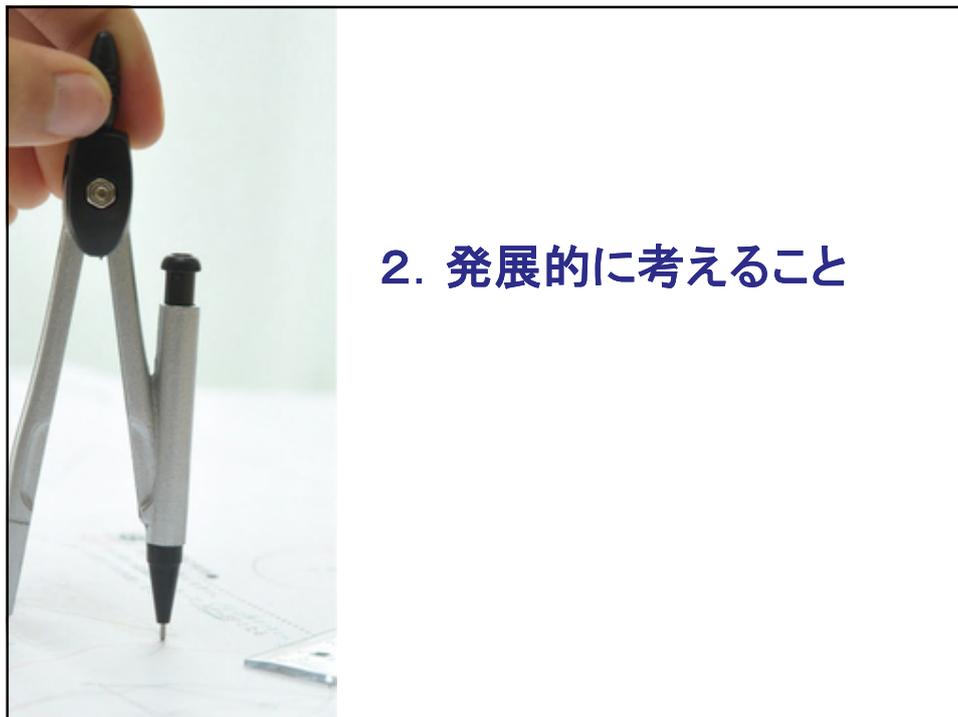
- 「発見的発展」から「新たな発展」に向けてモデルプレートが機能する。
- 上記の成果は全ての検証授業で得られたものではなく、本研究が構想する授業の具現化は容易ではない。
- 教師の発展的な思考や態度、内容についての理解は不十分である。



<本稿における目的>

発展的思考を視点にした学習内容の考察を支援する手立てとして発展的思考の関連図を開発し、一定期間の試行からその機能の検証と改善を行う。

6/32

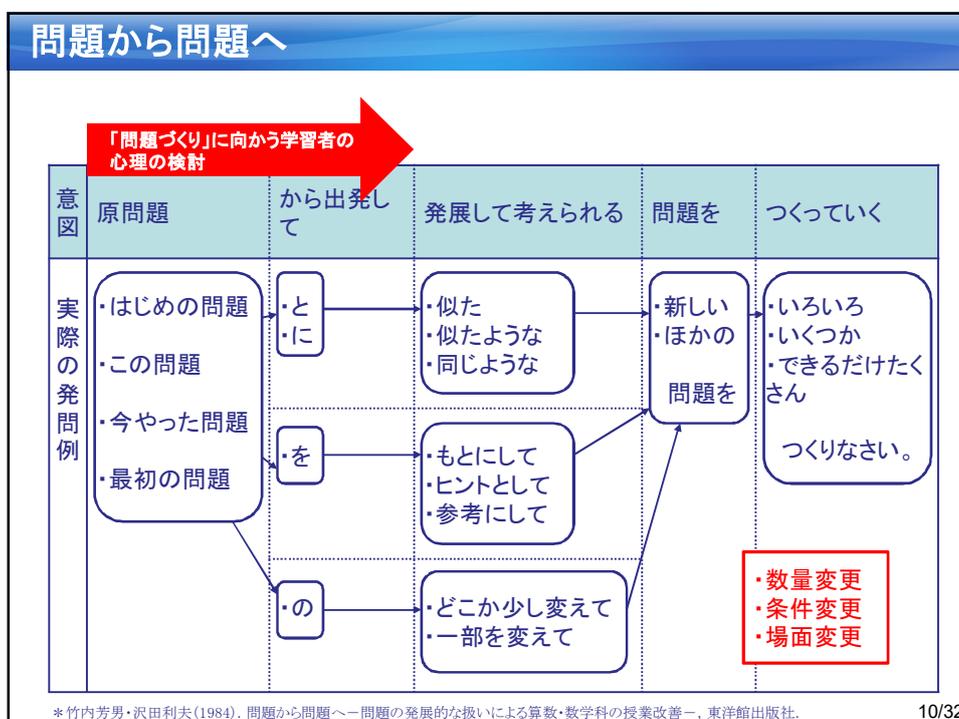
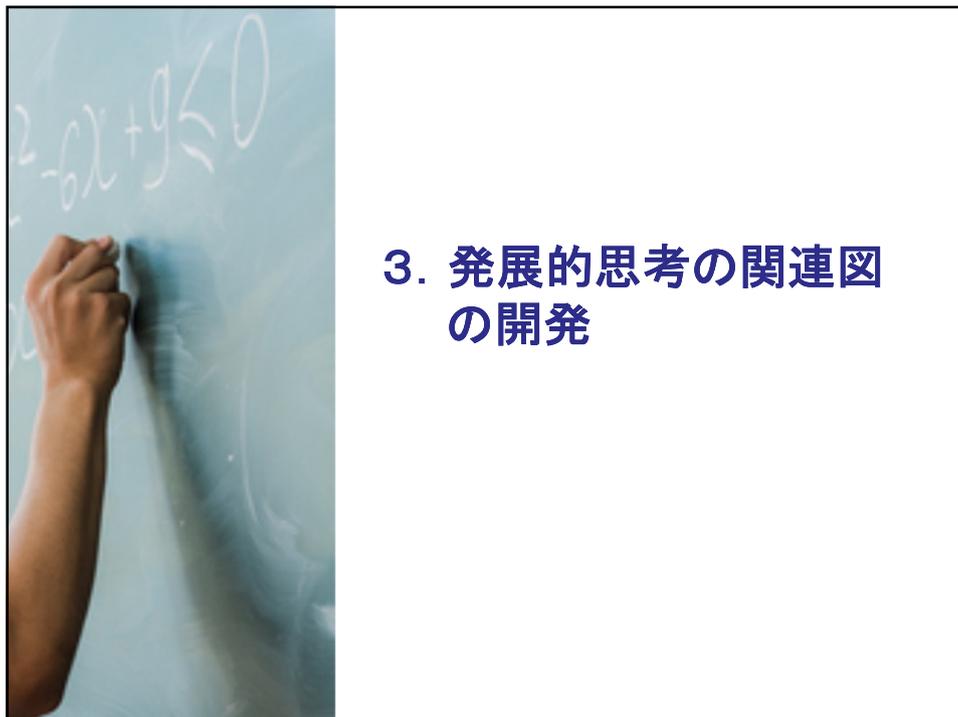


2. 発展的に考えること

本研究における「発展的に考えること」の捉え方

発見的発展	構造的発展	新たな発展
<p>構造的な発展のきっかけを生み出す、当面の問題(狭義の意味)から次の問題(狭義の意味)へと発見的な気づきの過程。</p>	<p>構造化に向けて新しく見出した概念や性質をより広い立場にも適用しようとすることの「統合」の働きと、その構造化に向けた「簡潔・明瞭・的確」と「一般化」の働きと、その過程。</p>	<p>発見的発展の過程で得た知的欲求により、構造化した概念や性質を、「数値を変える」「場面を変える」「数値と場面を変える」「考察の視点を変える」を行い、新たに発展させる過程。</p>
	<ul style="list-style-type: none"> ・統一的、発展的に考察(文部省, 1968・1969) ・統一的・発展的に考察する力(文部科学省, 2017) ・統合といった観点による発展的な考察(中島, 1982) ・数学はもてを発展的、統一的にみてより簡潔・明瞭・的確なものを求め続ける態度に支えられている。(清水, 2006) ・内包的一般化と外延的一般化(Dürfler, 1991) 	

8/32



g2. 数量変更

第1時 「比例を表す式」		第2時 「範囲を広げる」
<p>(問題) 毎分80mの速さで歩くと き、歩く時間と進む道の りの関係を調べてみまし よう。</p> <p>(まとめ) yがxの関数で、次のよう な式で表されるとき、yは xに比例するという。 $y=ax$</p> <p>xとyの対応に着目し て$y=ax$を捉える。</p>	<p>教科書の展開による 発展</p> <p>変数や比例定数を 正の数から負の数 へと発展する</p>	<p>変域や比例定数の 範囲を負の数まで広 げる。</p>

(藤井他, 2015)11/32

g3. 条件変更

第1時 「比例を表す式」		第3時 「1組の値からの式表現」
<p>(問題) 毎分80mの速さで歩くと き、歩く時間と進む道の りの関係を調べてみまし よう。</p> <p>(まとめ) yがxの関数で、次のよう な式で表されるとき、yは xに比例するという。 $y=ax$</p> <p>xとyの対応に着目し て$y=ax$を捉える。</p>	<p>教科書の展開による 発展</p> <p>比例定数について、 比例関係の考察に よる式表現から1組 の値から式表現する ことへの発展</p>	<p>(問題) yはxに比例し、$x=2$のと き$y=6$です。 このとき、yをxの式で表 しなさい。</p> <p>(まとめ) 比例定数aとすると、 $y=ax$と表すことができる。 $x=2$のとき$y=6$である から、 $6=a \times 2$ $a=3 \quad \therefore y=3x$</p>

12/32

g5. 視点変更

第2時 「範囲を広げる」

(問題)
ある自動車が、東西にのびるまっすぐな道を東へ向かって毎時80kmの速さで走っている。

(まとめ)
比例 $y=ax$ では、 x の変域を負の数にひろげても、比例定数が負の数の場合でも、正の数の場合と同じ性質が成り立つ。

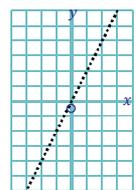
変域や比例定数の範囲を負の数まで広げる。

教科書の展開による発展

第5時 「比例のグラフ」

(問題)
 $y=2x$ について、どんなグラフになるか調べてみましょう。

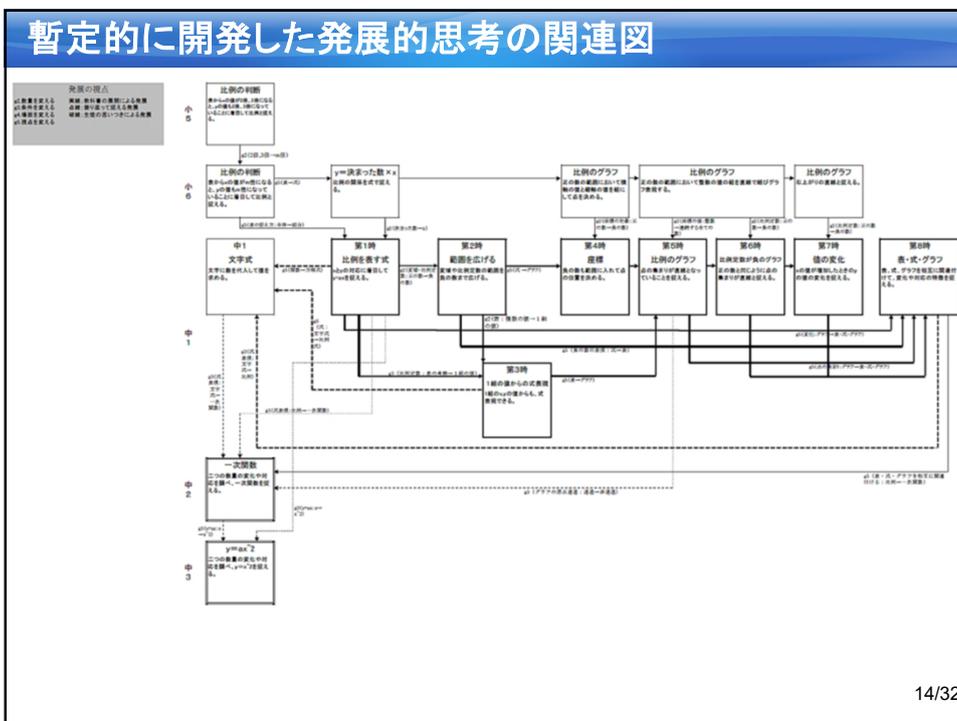
(まとめ)

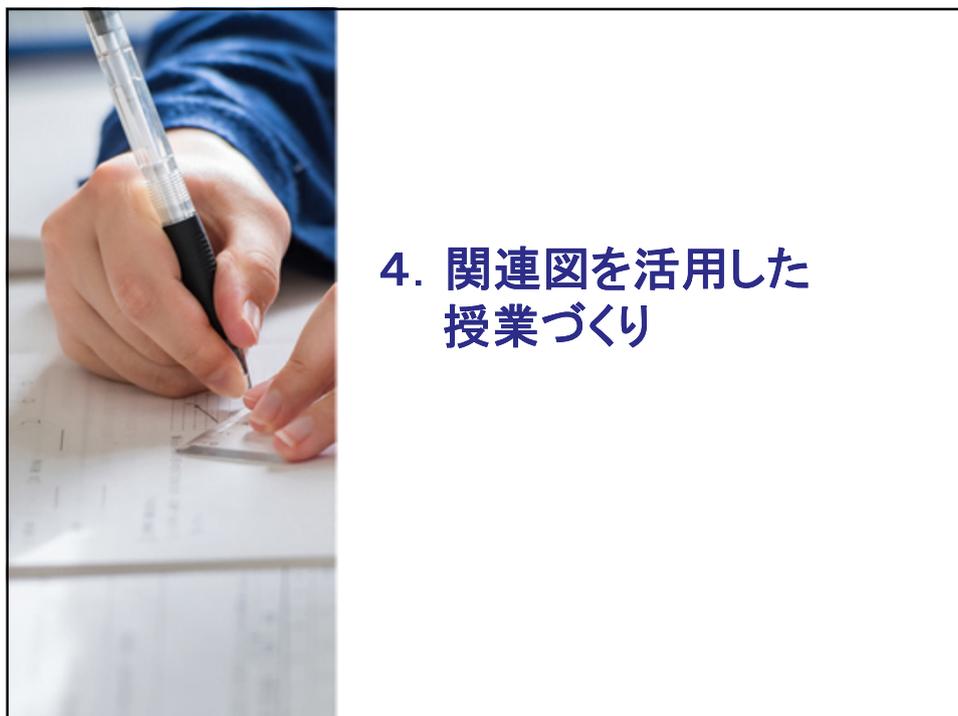


点の集まりが直線となっていることを捉える。

式からグラフへと視点を変えて発展

13/32





発展的思考を視点にした考察の内面化モデル

- ① 授業者が、発展的思考を考える気持ちになっている。
- ② 授業者に発展的思考の関連図を示す。
- ③ 授業者が、発展的思考を視点に関連性を捉えるよさに気付き、一時的に記憶する。
- ④ 授業づくりのプロセスにおいて一時的に記憶された発展的思考を視点に関連付けることを意識する。
- ⑤ 授業づくりのプロセスにおいて意識している発展的思考を視点にした関連付けを行う。
- ⑥ ⑤によって発展的思考を視点にした関連付けができ、実際の授業でも展開がうまくいったことを確認する。
- ⑦ 授業者が、この発展的思考を視点にした関連付けを獲得する。

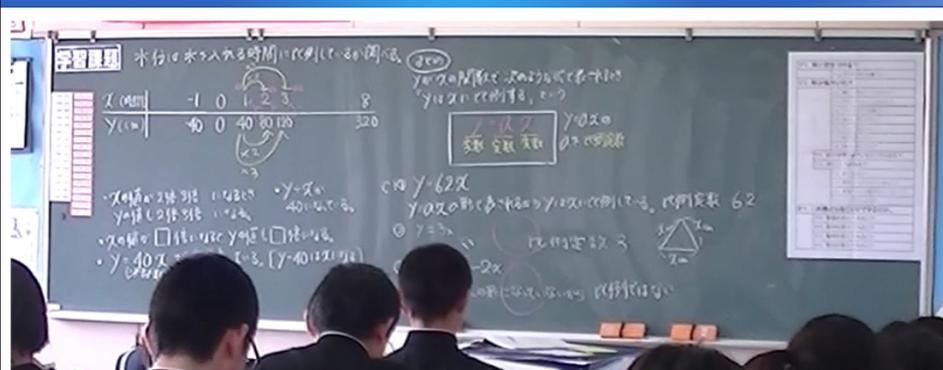
(重松他, 1993を基に作成) 16/32

調査の方法

- 調査期間 2017年10月25日～11月2日
- 指導内容 中学校第1学年「比例」(全6時間)
- 対象生徒 秋田県公立N中学校第1学年生徒32人
- 授業者 N中学校に勤務する教職約20年の数学教師A
- 調査手順
- ①教師Aに発展的に考える授業と発展的思考の関連図について説明。
 - ②全6時間の指導案を教師Aが作成。
 - ③指導案の検討。
 - ④生徒を対象に意識調査を実施。
 - ⑤授業の記録を教室後方よりビデオ撮影し、発展の状況を確認。(機器故障のため、第2時はビデオ撮影ができていない。第2時は教師からの聞き取り。)
 - ⑥生徒を対象に意識調査を実施。
 - ⑦教師に事後インタビューを実施。

17/32

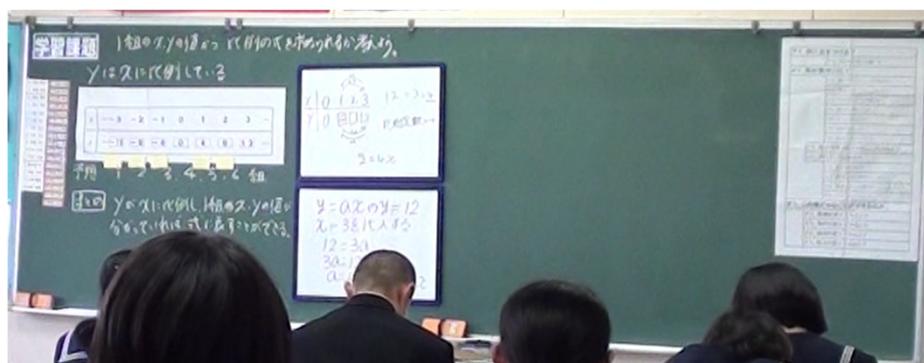
授業実践の実際(第1時)



- 教科書の問題(毎分80m歩く速さ)と異なり、水族館の水槽に地上0mから水を入れる問題に変更されていた。
- 表から比例であることを捉える段階で、 x の値が負の数を取ることを意識した生徒が見られた。
- 小学校「比例」の学習を踏まえ、比例の調べ方を生徒に問い、調べたことから比例の特徴 $y=ax$ にまとめている。

18/32

授業実践の実際(第3時)



- 問題場面は、 y は x に比例していることを前提にした表で、 y の値の一部が不明なものであった。
- 生徒から「ア. $x=1$ のときの y の値が比例定数になること」、「イ. $y=ax$ に1組の値を代入して求めること」が示された。アは第1時の逆であること(g5. 視点変更)、イは方程式の活用(g5. 視点変更)であるが、いずれも教師Aによる説明であった。
- 振り返りに、グラフについて考えたいという生徒が見られた。 19/32

授業実践の実際(第4時)



- 第3時に見られた「グラフについても考えたい」という振り返りをもとに、グラフの表現について考えていくことになった。
- 小学校「比例」の学習を振り返って、 $y=ax$ の式から値の組を調べてグラフに表すという見通しが教師Aによって示された。
- 小学校「比例」と同じ、第1象限だけのグラフを提示し、生徒に負の変域が必要なことを意識させていた。
- 変域を負の数に広げるにあたっては、数直線を想起することを期待した問いかけが見られた。 20/32

モデルプレートへの反応

モデルプレート(学習者の範) [%]	1時		2時		3時		4時		5時		6時	
	i	ii										
a1. 何に目をつける?(幹)	50.0	3.1	32.3	6.5	37.5	9.4	46.9	0	50.0	9.4	46.9	3.1
a2. 何(何と何)を調べる?	31.3	3.1	38.7	6.5	31.3	0	15.6	0	15.6	6.3	40.6	6.3
b1. 何か気付いた?(幹)	12.5	3.1	9.7	9.7	9.4	9.4	15.6	0	28.1	3.1	18.8	0
b2. 調べてみたいことがある?	18.8	18.8	19.4	12.9	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	9.4	40.6	3.1
b3. 考えてみたいことがある?	15.6	6.3	3.2	3.2	6.3	3.1	18.8	3.1	3.1	9.4	6.3	3.1
b4. 今までとどこが違う?	21.9	9.4	25.8	3.2	21.9	3.1	28.1	3.1	15.6	3.1	25.0	3.1
h1. 面白い考えだね。	3.1	3.1	3.2	9.7	0	0	0	0	3.1	6.3	0	3.1
h2. やってみようか。	21.9	3.1	32.3	3.2	18.8	3.1	18.8	0	21.9	3.1	25.0	3.1
c1. 何か分かった?	12.5	15.6	9.7	6.5	28.1	0	31.3	3.1	18.8	12.5	18.8	6.3
c2. 何から分かった?	6.3	0	3.2	3.2	9.4	0	3.1	0	3.1	3.1	15.6	0
c3. 前の学習と似ているところはある?	34.4	0	38.7	9.7	15.6	0	12.5	3.1	15.6	0	18.8	6.3
d1. 同じところはある?	0	0	19.4	0	6.3	0	9.4	0	6.3	0	6.3	3.1
d2. 他にあるか?	3.1	18.8	3.2	16.1	3.1	18.8	3.1	18.8	9.4	18.8	6.3	6.3
e1. 簡単に分かりやすく表すと?	6.3	6.3	6.5	3.2	6.3	15.6	12.5	15.6	9.4	6.3	3.1	3.1
e2. 算数(または数学)らしく表すと?	6.3	3.1	3.2	3.2	0	0	6.3	9.4	0	6.3	0	3.1
f1. いつでもいえる?	3.1	9.4	3.2	6.5	3.1	31.3	0	12.5	6.3	12.5	3.1	0
g1. この後どんなことができるのか。(幹)	12.5	31.3	6.5	35.5	3.1	34.4	3.1	40.6	12.5	50.0	0	43.8
g2. 数量を変えてみると?	9.4	21.9	3.2	29.0	0	31.3	3.1	37.5	3.1	62.5	0	28.1
g3. 条件を変えてみると?	0.0	18.8	3.2	22.6	0	15.6	0	40.6	0	21.9	0	28.1
g4. 場面を変えてみると?	3.1	21.9	0	29.0	0	12.5	0	18.8	0	18.8	0	31.3
g5. 視点を変えてみると?	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

▶ 幹となるモデルプレートへの反応が30%を上回っている。

21/32

発展的思考の関連図が授業づくりに機能した点

例えば,

- ▶ 第1時で示された問題場面は、第2時で指導する変域と比例定数が負の数の場合を想定したものであり、生徒も「新たな発展」として意識されていた。
- ▶ また、第1時で比例であることを調べるにあたって、小学校「比例」の学習を想起することを求める場面が見られた。
- ▶ 前時の振り返りをもとに、本時の学習を始める展開が多く見られた。
- ▶ 小学校「比例」を振り返って、学習が発展していることを意識させる場面が見られた。
- ▶ 中学校数学の既習を振り返って、学習が発展していることを意識させる場面が見られた。

22/32

教師Aのインタビュー

小学校での学習内容が把握でき、授業のねらいを明確にすることができたのは、関連図があったおかげだと思います。関連図の内容については特に変更することはないと思いました。

→教師Mは、本実践において、発展的思考を視点にした関連付けができ、実際の授業でも展開がうまくいったことを確認している。

【内面化モデルの⑦に相当】

→発展的思考の関連図にはなかった正負の数における数直線との関連付け等が見られ、発展的思考を視点にした関連付けの獲得も進んでいると推察できる。【内面化モデルの⑧に相当】

23/32

本実践において改善可能な点

例えば、

- 第3時では、生徒から「ア. $x=1$ のときの y の値が比例定数になること」、「イ. $y=ax$ に1組の値を代入して求めること」が示された。アは第1時の逆であること(g5. 視点変更)、イは方程式の活用(g5. 視点変更)であるが、いずれも教師Aによる説明であったが、生徒の気づきを待ってもよかった。
- 小学校「比例」の学習を振り返って、 $y=ax$ の式から値の組を調べてグラフに表すという見通しが教師Aによって示されたが、生徒の気づきを待ってもよかった。

→教師Mは発展的思考の関連付けはできていたが、発展的に考えることの営みは、教師が主導する場面もみられた。発展的思考・態度についてもあわせて、検討する必要がある。

→また、発展的思考の関連付けは行われていたが、関連付けがなされていない場面もみられた。発展的思考の関連図の活用に工夫が必要である。

24/32



5. モデルプレートの有効性と改善

発展的思考の関連図の活用方法の改善

本調査における手順 (内面化モデル参照)	改善した手順
① 授業者に発展的に考える授業について説明し、発展的思考を考える気持ちになってもらう。 ② 授業者に、発展的思考の関連図を示す。 ③ 授業者が、発展的思考を視点に関連性を捉えるよさに気づき、一時的に記憶する。 ④ 授業者が、授業づくりのプロセスにおいて一時的に記憶された発展的思考を視点に関連付けることを意識する。 ⑤ 授業者が、授業づくりのプロセスにおいて意識している発展的思考を視点にした関連付けを行う。 ⑥ 授業者が、⑤によって発展的思考を視点にした関連付けができ、実際の授業でも展開がうまくいったことを確認する。 ⑦ 授業者が、この発展的思考を視点にした関連付けを獲得する。	① 授業者に発展的に考える授業について説明し、発展的思考を考える気持ちになってもらう。 ② 授業者に、発展的思考の関連図を示す。 ③ 授業者が、発展的思考を視点に関連性を捉えるよさに気づき、一時的に記憶する。 ④ 授業者が、授業づくりのプロセスにおいて一時的に記憶された発展的思考を視点に関連付けることを意識する。 ⑤ 授業者が、授業づくりのプロセスにおいて意識している発展的思考を視点にした関連付けを行う。 ⑥ 授業者が、⑤によって発展的思考を視点にした関連付けができ、実際の授業でも展開がうまくいったことを確認する。 ⑦ 授業者が、この発展的思考を視点にした関連付けを獲得する。 ⑧ ②に戻って、発展的思考の関連図を改善する。さらに、②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧へと繰り返す。

26/32



今後の課題

- 発展的思考の関連図を改善していく過程の検証。
- 中学校数学におけるモデルプレートによる授業改善。

謝辞

本研究は、**JSPS科研費15K04390**の助成を受けたものです。

本研究の授業実践にご理解とご協力をいただきました秋田市立秋田西中学校数学科教諭の川口 淳先生と第1学年生徒の皆さんに感謝申し上げます。

ありがとうございました。

29/32

引用・参考文献(1)

- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木 伸次(2016)。「発展的に考えること」の指導に関する教師の意識に関する調査, 全国数学教育学会第43回研究発表会発表資料.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木 伸次・椎名美穂子(2017a). 発展的に考える授業展開の研究－発見的発展の視点－, 東北数学教育学会年報, 48号, pp.34～44.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木 伸次・椎名美穂子(2017b). 児童が発展的に考えることを支援する授業モデルの開発と実践, 全国数学教育学会 第46回研究発表会発表資料.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木 伸次・椎名美穂子(2017c). 学習者が発展的に考えることを支援するモデルプレートの開発とその検証, 数学教育学論究, 99巻, 臨時増刊号, pp.9～16.
- 佐藤学・重松敬一・赤井利行・杜威・新木 伸次・椎名美穂子(2018). 数学教育における教材開発の研究VI－モデルプレートを活用した授業改善の試み－, 秋田大学教育文化学部研究紀要, 73巻, 投稿中.

30/32

引用・参考文献(2)

竹内芳男・沢田利夫(1984). 問題から問題へー問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善ー, 東洋館出版社.

藤井齊亮・俣野博・他37名(2015). 新編新しい数学1, 東京書籍, pp.110~123.

重松敬一・勝美芳雄・上田喜彦(1993). 数学教育におけるメタ認知の研究(8)ー子どもへのメタ認知の内面化に関する調査研究ー. 第26回数学教育論文発表会論文集, pp.97-102.